Soit le système linéaire $(S)$: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$ d'inconnue $(x_1, x_2, \ldots, x_p) \in K^p$.

1. Les scalaires $a_{ij}$ sont appelés **les coefficients** de $(S)$ et $b_1, \ldots, b_n$ le second membre.
2. Une **solution** de $(S)$ est tout n-uplet $\tilde{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$ vérifiant les $n$ équations de $(S)$. Résoudre $(S)$ c'est trouver toutes ses solutions.
3. $(S)$ est **échelonné** lorsque en passant d'une ligne de $(S)$ à la suivante, au moins une inconnue « disparait » à jamais sur les lignes suivantes (cette inconnue disparue a en fait son coefficient nul).
4. $(S)$ est de **Cramer** lorsque $n = p$ et $(S)$ admet une unique solution.
5. $(S)$ est **compatible** lorsque $(S)$ admet au moins une solution. $(S)$ est incompatible lorsque $(S)$ $n'$admet aucune solution.
6. A ce système $(S)$ , on associe
   - le **système linéaire homogène** $(SH)$: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = 0 \end{cases}$
   - $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$ la **matrice des coefficients** de $(S)$.Par définition, $\boldsymbol{le\ rang\ de\ (S)} = rg(S) = rg(A)$.
   - $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ la **matrice du second membre** de $(S)$.
7. **Opérations élémentaires et réversibles** sur $(S)$ :
   - échanger deux lignes de $(S)$ (notée $L_i \leftrightarrow L_j$)
   - multiplier une ligne de $(S)$ par un scalaire non nul (notée $L_i \leftarrow \lambda L_i$)
   - ajouter à une ligne de $(S)$ une autre ligne de $(S)$ multipliée par un scalaire(notée $L_i \leftarrow L_i + \beta L_j$).
8. Deux **systèmes linéaires** $(S)$ et $(S')$ sont **équivalents** lorsqu'on passe de l'un à l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires. On note alors $(S) \Leftrightarrow (S')$ . Deux systèmes équivalents $(\Leftrightarrow)$ ont les mêmes solutions (puisque les opérations sont réversibles). 19

**Relation système linéaire et matrice** : On considère le système linéaire $(S)$ précédent dont la matrice des coefficients est $A$ et celle du second membre $B$. *Démo*

1. **Ecriture matricielle d'un système :** en posant $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$, $[(S) \Leftrightarrow AX = B]$ et $[(SH) \Leftrightarrow AX = 0]$.
2. $\tilde{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$ est solution de $(S)$ **sietssi** $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ vérifie $AX = B$.

**( NB : $X$ et $\tilde{X}$ sont souvent confondus bien qu'ils n'aient pas la même nature mathématique)**

3. $(S)$ est échelonnée dès que sa matrice $A$ est échelonnée.
4. Echelonner $A$ en lignes et faire en parallèle les mêmes opérations sur le second membre $B$ permet d'échelonner $(S)$. 20

**Relation entre les solutions de (S) et celles de son système homogène.** Si $\widetilde{X_0}$ est une solution particulière de $(S)$ alors les solutions de $(S)$ sont toutes les matrices de la forme $\widetilde{X_0} + \tilde{Y}$ où $\tilde{Y}$ solution de $(SH)$. *Démo*

**Théorème de Gauss-Jordan**. Tout système linéaire est équivalent à un système linéaire échelonné. 22

**Caractérisation matricielle d'un système de Cramer** *Explications*

Un système linéaire $(S)$, de matrice des coefficients $A$, est de Cramer

***sietssi*** $(S)$ est un système à $n$ équations et $n$ inconnues et $rg(S) = rg(A) = n$.

***sietssi*** $(S)$ est un système à $n$ équations et $n$ inconnues et $A \sim_{LouC} I_n$. 23

**Ex 6** Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -5 \\ 8 & -9 & 13 \end{bmatrix}$ $et$ $Y = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$. Résoudre le système $AX = Y$, d'inconnue $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ en fonction de $a$, $b$ et $c$. Donner ensuite les solutions pour $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ puis $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 10 \end{bmatrix}$. Déterminer le rang du système.

**Ex 7:** Soit $C \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ dont le coefficient ligne $i$ est $c_i = i$ $et$ $A = (a_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$telle que : $a_{ij} = \frac{i}{j}$.
Calculer $A^2, rg(A)$ $et$ Calculer $AC$. Résoudre $AX = C$ .

**Ex 8** Soit $\lambda$ un paramètre réel et $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Résoudre le système $(S)$: $AX = \lambda X$, d'inconnue $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ en fonction de λ.
Déterminer le rang de la matrice des coefficients de $(S)$ en fonction de la valeur du paramètre $\lambda$.