Matrice d'opérations élémentaires.

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 0 & \cdots & 1 & \\ & (0) & & \vdots & 1 & \vdots & \\ & & & 1 & \cdots & 0 & \\ 0 & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{matrix}$$

$\underbrace{\qquad}_{i} \qquad \underbrace{\qquad}_{j}$

matrice de transposition

obtenue en faisant subir $L_i \leftrightarrow L_j$ (ou $C_i \leftrightarrow C_j$) à I_n

$$D_i(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \\ & \ddots & 1 & & & & \\ & & & \lambda & & & \\ & (0) & & & 1 & & \\ & & & & & 1 & \ddots \\ & & & & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & & & & & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\qquad}_{diag\ i}$

matrice de dilatation

obtenue en faisant subir $L_i \leftarrow \lambda L_i$(ou $C_i \leftarrow \lambda C_i$) à I_n

$$H_{ij}(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \\ & \ddots & 1 & & & & \\ & & & 1 & & \beta & \\ & (0) & & & 1 & & \\ & & & & & 1 & 0 \\ 0 & & & & & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{matrix}$$

$\underbrace{\qquad}_{i} \qquad \underbrace{\qquad}_{j}$

matrice de transvection

obtenue en faisant subir $L_i \leftarrow L_i + \beta L_j$ (ou $C_j \leftarrow C_j + \beta C_i$) à I_n .

12

Matrice échelonnée par ligne (resp colonne).

Une matrice A est dite **échelonnée par ligne (resp. colonne)** lorsqu'elle vérifie les deux propriétés suivantes :

1) Si une ligne (resp colonne) est nulle alors toutes les suivantes le sont aussi.

2) Si chaque ligne (resp colonne) non nulle débute par davantage de zéros que la ligne (resp colonne) précédente.

Les **pivots** d'une telle matrice échelonnée sont les réels non nuls qui débutent les lignes (resp colonnes)non nulles.

Matrice échelonnée réduite par ligne (resp. colonne) et de son rang.

Une matrice A est dite **échelonnée réduite par ligne (resp. colonne)** lorsqu'elle vérifie les deux propriétés suivantes :

Ou bien elle est nulle . Alors, par définition, le rang de A est nul i.e. $\boldsymbol{rg(O_{np}) = 0}$.

Ou bien elle est échelonnée, que tous ses pivots valent 1 et que sur la colonne (resp. ligne) de chaque pivot tous les coefficients autres que le pivot sont nuls. Alors il existe un entier r compris entre 0 et n telle que A contienne r lignes non nulles et $n - r$ lignes nulles. Alors le rang de A est égal à son nombre de pivot i.e $\boldsymbol{rg(A) =}$ $\boldsymbol{nbre\ de\ pivots\ de\ A =\ nbre\ de\ lignes\ non\ nulles\ de\ A.}$

15

Opérations élémentaires	produit matriciel correspondant	Opérations élémentaires inverses	produit matriciel correspondant
$L_i \leftrightarrow L_j\ resp.\ C_i \leftrightarrow C_j$	$T_{ij}A\ \ resp.\ AT_{ij}$	$L_j \leftrightarrow L_i$	$T_{ij}A'\ \ resp.\ A'T_{ij}$
$L_i \leftarrow \lambda L_i\ \ resp.\ C_i \leftarrow \lambda C_i\ \ tq\ \lambda \in K^*$	$D_i(\lambda)\ A\ \ resp.\ AD_i(\lambda)$	$L_i \leftarrow \frac{1}{\lambda}L_i\ \ resp.\ C_i \leftarrow \frac{1}{\lambda}C_i\ tq\ \lambda \in K^*$	$D_i\left(\frac{1}{\lambda}\right)A'\ \ resp.\ \ A'D_i\left(\frac{1}{\lambda}\right)$
$L_i \leftarrow L_i + \beta L_j\ resp\ C_j \leftarrow C_j + \beta C_i\ tq\ \beta \in K$ et $i \neq j$	$H_{ij}(\beta)A\ \ resp.\ AH_{ji}(\beta)$	$L_i \leftarrow L_i - \beta L_j\ \ resp.\ C_i \leftarrow C_i - \beta C_j\ tq\ \beta \in K$ et $i \neq j$	$H_{ij}(-\beta)A'\ \ resp.\ A'^{H_{ji}}(-\beta)$

Illustrations

13

Deux matrices A et A' sont équivalentes par ligne (resp. colonne)lorsque l'on passe de l'une à l'autre en faisant une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes . Deux telles matrices sont nécessairement de même dimension. On note alors $A \sim_L A'$.

Faire subir à A une suite finie d'opérations élémentaires sur ses lignes (resp. colonne) revient à multiplier A à gauche (resp à droite) par un nombre fini de matrices d'opérations élémentaires .

$\boldsymbol{A} \sim_L A'$ sietssi il existe un nombre fini q de matrices $P_1, P_2, \ldots, P_q$ d'opérations élémentaires telles que $A' = P_1P_2 \ldots P_qA$.

$A \sim_C A'$ sietssi il existe un nombre fini q de matrices $P_1, P_2, \ldots, P_q$ d'opérations élémentaires telles que $A' = AP_1P_2 \ldots P_q$.

14

Théorème de Gauss-Jordan.

1. Toute matrice est équivalente par ligne (resp. colonne) à une matrice échelonnée par ligne (resp. colonne) et est équivalent par ligne (resp. colonne) à un unique matrice réduite par ligne (resp. colonne). Démo
2. Soit A une matrice de type (n, p) . Il existe une unique matrice U(resp. V) échelonnée réduite par ligne (resp. colonne) de type (n, p) et une matrice P $(resp\ Q)$, carrée d'ordre n(resp p), produit de matrices d'opérations élémentaires, telles que : $A = PU$ $(resp\ A = VQ)$ et $rg(U) = rg(V)$.

16

Rang d'une matrice: Soit A une matrice de type (n, p).

Le rang de A est le nombre de pivot de la matrice R échelonnée et réduite par ligne (ou colonne), équivalente par ligne (ou colonne) à A. $rg(A) = rg(R)$.

17

Propriétés du rang . Explications

1) Deux matrices équivalentes ($\sim$) par ligne (ou colonne) ont le même rang.
2) Le rang d'une matrice échelonnée est égal au nombre de ses pivots.
3) Le rang d'une matrice A est égal au nombre de pivots de toute matrice échelonnée équivalente par ligne(ou colonne) à A
4) Soit A une matrice carrée d'ordre n. $rg(A) = n$ sietssi A est équivalente par lignes (ou colonnes) à I_n.
5) $\forall A \in M_{n,p(K),}, rg(A) = rg(A^T) \leq min(n, p)$.

18

Ex 4 Déterminer la matrice échelonnée réduite par ligne équivalente ligne à $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & -11 \\ 5 & -1 & 1 & -5 \end{pmatrix}$ idem en colonne. Déterminer $rg(A)$.

Ex 5 Calculer le rang des matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.