

Une **matrice A à coefficients dans K de type (n, p)** (ou n lignes et p colonnes) est un

$$\text{tableau noté: } A = (a_{ij})_{\substack{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ j \in \llbracket 1, p \rrbracket}} \text{ ou } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1, p-1} & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2, p-1} & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{i, p-1} & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{n, p-1} & a_{np} \end{pmatrix}$$

Où  $a_{ij} = a_{\substack{i \\ \text{premier indice} \\ \text{de ligne}}} \substack{j \\ \text{deuxième indice} \\ \text{de colonne}} = \text{le coefficient de la ligne } i \text{ et la colonne } j \text{ du tableau } A$

Deux matrices sont égales lorsqu'elles ont la même dimension et les mêmes coefficients.

Une **matrice colonne** (resp ligne) est une matrice de type  $(n, 1)$  (resp.  $(1, p)$ ).

Une **matrice carrée d'ordre n** est une matrice de type  $(n, n)$ .

$M_{n,p}(K)$  est l'ensemble des matrices n lignes et p colonnes à coefficients dans K et

$M_n(K)$  est l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans K. **1**

La **matrice nulle**, n lignes p colonnes, est la matrice, n lignes p colonnes dont tous les coefficients sont nuls, notée **0 ou (O) ou  $O_{n,p}$** .

**Matrice identité** : matrice carrée  $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\delta_{ij})_{\substack{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ j \in \llbracket 1, n \rrbracket}}$  tq :  $\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$ . **2**

symbole de Kronecker

### Addition matricielle et multiplication par un scalaire

Soit  $A = (a_{ij})_{\substack{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ j \in \llbracket 1, p \rrbracket}}$  et  $B = (b_{ij})_{\substack{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ j \in \llbracket 1, p \rrbracket}} \in M_{n,p}(K)$  et  $\alpha \in K$ .

$A + B$  et  $\alpha A$  (ou  $\alpha \cdot A$ )  $\in M_{n,p}(K)$  sont telles que :  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,

$$(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \text{ et } (\alpha A)_{ij} = \alpha \times a_{ij}$$

$\alpha A + \beta B = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} + \beta b_{11} & \dots & \alpha a_{1p} + \beta b_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{n1} + \beta b_{n1} & \dots & \alpha a_{np} + \beta b_{np} \end{pmatrix} \in M_{n,p}(K)$  est une **combinaison linéaire (c.l)** de

A et B. **Généralisation** : Une combinaison linéaire des matrices  $A_1, \dots, A_s$  de  $M_{n,p}(K)$  est toute matrice de la forme  $\lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_s A_s$  telle que  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  scalaires.

**Produit matriciel** Soit  $A = (a_{ij})_{\substack{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ j \in \llbracket 1, p \rrbracket}} \in M_{n,p}(K)$ ,  $B = (b_{ij})_{\substack{i \in \llbracket 1, p \rrbracket \\ j \in \llbracket 1, q \rrbracket}} \in M_{p,q}(K)$ .

$A \times B$  (ou  $AB$ )  $\in M_{n,q}(K)$  est telle que  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, q \rrbracket, (AB)_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}$ . **3**

**Conséquence** : si A et B sont dans  $M_n(K)$  alors  $\alpha A + \beta B$  et  $AB$  sont dans  $M_n(K)$ .

**Puissance et polynôme d'une matrice carrée**. Soit  $A \in M_n(K)$ . Par convention,  $A^0 = I_n$ . et  $\forall p \in \mathbb{N}^*, A^p = A^{p-1} A = AA^{p-1} = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{p \text{ fois}} \in M_n(K)$ .

Si  $P(X) = a_0 \underset{\text{c.c.}}{1} + a_1 X + \dots + a_p X^p \in K[X]$  alors  $P(A) = a_0 I_n + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + a_p A^p$ . **4**

**Transposée** Soit  $A = (a_{ij})_{\substack{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ j \in \llbracket 1, p \rrbracket}} \in M_{n,p}(K)$ , La **matrice transposée de A** est

$A^T \in M_{p,n}(K)$  tq  $\forall (k, l) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket, (A^T)_{lk} = a_{kl}$ ; autrement dit, la ligne i de  $A^T$  est la colonne i de A et la colonne i de  $A^T$  est la ligne i de A. **8**

**Une matrice élémentaire**. Dans  $M_{n,p}(K)$  on note  $E_{ij}$  la matrice élémentaire dont tous les coefficients sont nuls sauf le coeff. ligne i et colonne j qui vaut 1. **10**

**Règle de calcul**. Soit A, B, C matrices et  $\alpha$  et  $\beta$  des scalaires

$$\alpha \cdot \text{type}(n, p) + \beta \cdot \text{type}(n, p) = \text{type}(n, p) \\ \text{type}(n, p) \times \text{type}(p, q) = \text{type}(n, q)$$

**Dès que les sommes ou/ et produits existent**, on a :

- $A + (B + C) = (A + B) + C$  et  $A + B = B + A$   
L'addition matricielle est associative et commutative.
- $A + O_{np} = A + O_{np} = A$   $O_{np}$  est l'élément neutre de l'addition matricielle.
- $A + (-1)A = O_{np}$   $(-1)A$  notée  $-A$  est le symétrique de A pour l'addition.
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$  et  $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$  La multiplication externe est distributive à gauche et à droite sur l'addition dans K.
- $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A) = \beta(\alpha A)$  L'associativité mixte entre multiplication externe et produit dans K.
- $\alpha A = O \Leftrightarrow A = O$  ou  $\alpha = 0$ .
- $(AB)C = A(BC)$  Le produit matriciel est associatif.
- $A(B + C) = AB + AC$  et  $(A + B)C = AC + BC$  Le produit matriciel est distributif sur l'addition matricielle **Démo**
- $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$  et  $\alpha(\beta B) = (\alpha\beta)B = \beta(\alpha B)$   
L'associativité du produit mixte entre produits externe et matriciel.
- $A(O) = O = (O)A$
- $A I_p = A = I_n A$  **Démo** I est l'élément neutre du produit matriciel.

### Les interdits **Démo**

- Le plus souvent,  $AB \neq BA$ . **Le produit matriciel n'est pas commutatif.**  
Quand deux matrices vérifient  $AB = BA$ , on dit que ces deux matrices commutent.....c'est rare.
- $AB = O \nRightarrow B = O$  ou  $A = O$ . et  $A^2 = 0 \nRightarrow A = O$ . **Le produit matriciel n'est pas intègre**
- $AB = AC \nRightarrow B = C$  **Certaines matrices n'ont pas d'inverse.**

### Multiplication à droite par une matrice colonne

Si  $A \in M_{n,p}(K)$  et  $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} \in M_{p,1}(K)$  alors  $AB = \sum_{k=1}^p b_k C_k$  où  $C_1, \dots, C_p$  les colonnes de A. **Démo**  
combi. linéaire des colonnes de A

Si  $A = (a_1 \ a_2 \ a_3 \ \dots \ a_p) \in M_{1,p}(K)$  et  $B \in M_{p,q}(K)$  alors  $AB = \sum_{k=1}^p a_k L_k$  où  $L_1, \dots, L_n$  les lignes de B. **7**

### Règles de calcul de la transposition : **Démo**

Soit A et B deux matrices à coeff. dans K et  $\alpha, \beta$  des scalaires

- $(A^T)^T = A$ .
- Si A et  $B \in M_{n,p}(K)$  alors  $(\alpha A + \beta B)^T = \alpha A^T + \beta B^T$ .
- Si AB existe alors  $B^T A^T$  existe et  $(AB)^T = B^T A^T$ . **9**

### Propriétés des matrices élémentaires **Démo**

- Si le produit existe alors  $E_{ij} E_{kl} = \delta_{jk} E_{il}$ .
- Si  $M = (m_{ij}) \in M_{n,p}(K)$  alors  $M = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p m_{ij} E_{ij}$  est l'unique écriture de M comme c.l. des  $E_{ij}$ . **11**

Une combinaison linéaire de A et B existe uniquement si A et B de même taille. Le produit AB existe uniquement si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de

### Conséquences :

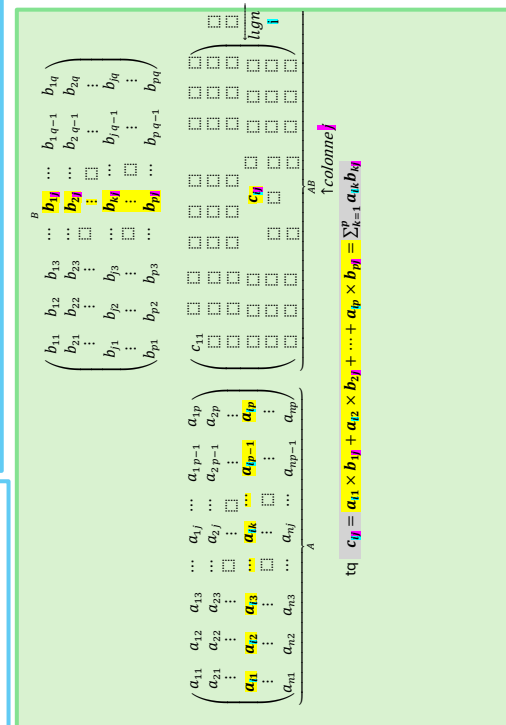
Si  $A \in M_n(K)$   $P(X) \in K[X]$  tq  $P = BQ + R$  où  $(B, Q, R) \in K[X]^2$  alors  $P(A) = B(A)Q(A) + R(A)$ .

### FBN et formule de fact.

Soit  $A, B \in M_n(K)$  et  $p \in \mathbb{N}$ . Si  $AB = BA$

alors  $(A + B)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} A^k B^{p-k}$  et

$$A^{p+1} - B^{p+1} = (A - B) \left( \sum_{k=0}^p B^k A^{p-k} \right). \quad \mathbf{6}$$



**Ex 0**  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} C = (4 \ 5)$  et  $D = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ . Quels produits entre ces matrices existent ? Les calculer.

**Ex 1** Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 3 & 6 & -9 \end{pmatrix}$ . Trouver deux matrices colonnes X telles que  $AX = O$ .

**Ex 2** Soit  $a \in \mathbb{R}$  et  $A = \begin{pmatrix} \cos(a) & \sin(a) \\ -\sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix}$ . Calculer  $A^2, A^3, A^4, A^5$ . Déterminer  $A^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Ex 3** Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ . Montrer qu'il existe une

suite u telle que :  $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2u_n & 1 - 2u_n & 2u_n \\ u_n & -u_n & 1 + u_n \end{pmatrix}$ .

Expliciter  $A^n$  en fonction de n.