Matrice inversible et inverse

La matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est inversible lorsqu'il existe $B \in M_n(\mathbb{R})$ telle que : $AB = I_n = BA$. Une telle matrice B est unique, s'appelle l'inverse de A ET notée $A^{-1} \in M_n(\mathbb{R})$.

Ainsi, lorsque A^{-1}existe, elle vérifie $AA^{-1} = I_n = A^{-1}A$.

On note $\boldsymbol{GL_n(K)}$ l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{R})$ inversibles. 32

Conséquence : Si A est inversible alors : $AB = AC \Leftrightarrow B = C$ et $AX = Y \Leftrightarrow X = A^{-1}Y$

Règle de calcul sur les matrices inversibles

Soit $A, B,\ P$ et $Q \in M_n(\mathbb{R})$, $\alpha \in K^*$ et $k \in \mathbb{N}$.

•Si P et Q sont inversibles alors $P^{-1}, \alpha P$, P^T, PQ et P^k sont inversibles et $(P^{-1})^{-1} = P$, $(\alpha P)^{-1} = \frac{1}{\alpha}P^{-1}$, $(P^T)^{-1} = (P^{-1})^T$, $(PQ)^{-1} = Q^{-1}P^{-1}$ et $(P^k)^{-1} = (P^{-1})^k$

mais $P + Q$ n'est pas en général inversible.

•Si $A = P^{-1}BP$ alors $\forall k \in \mathbb{N}, A^k = P^{-1}B^kP$; si, de plus, B est inversible alors A est inversible et $\forall k \in \mathbb{Z}, A^k = P^{-1}B^kP$. 33

Caractérisation de l'inversibilité : Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. démo

1. A est inversible (a) *si et ssi* il existe une matrice B telle que $BA = I_n$ (b) ou $AB = I_n$
2. A est inversible *si et ssi* le système $AX = 0$, d'inconnue $X \in M_{n,1}(K)$, a une unique solution (qui est $X = 0_{n,1}$) (c)
3. A est inversible *si et ssi* $rg(A) = n$ (d)
4. A est inversible *si et ssi* $A \sim_L I_n$ (e)
5. A est inversible *si et ssi* A est un produit fini de matrices d'opérations élémentaires. (f)
6. A est inversible *si et ssi* l'un des systèmes linéaires associés à A est de Cramer. (g)
7. A est inversible *si et ssi* tout système linéaire associé à A est de Cramer. (h)
8. A est inversible *si et ssi* pour toute matrice colonne Y, le système $AX = Y$ a une unique solution. Le cas échéant, l'unique solution de $AX = Y$ est alors, $X = A^{-1}Y$. (i)
9. A n'est pas inversible *si et ssi* il existe une matrice colonne X non nulle telle que $AX = O$. (j)
10. A n'est pas inversible *si et ssi* l'une de ses colonnes est combinaison linéaire de ses autres colonnes. (k) 34

Inversibilité de matrices particulières démo

1. I_n est inversible et $I_n = I_n^{-1}$. O_n n'est pas inversible .
2. Toute matrice d'opération élémentaire est inversible et $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \forall \lambda \in K^*, \forall \beta \in K$, $T_{ij}^{-1} = T_{ij}$, $D_i(\lambda)^{-1} = D_i\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ et $H_{ij}(\beta) = H_{ij}(-\beta)$.
3. Toute matrice dont une ligne ou une colonne est nulle n'est pas inversible.
4. Si AB n'est pas inversible alors A ou B n'est pas inversible.
   Si A et B sont non nulles et vérifient $AB = O_n$ alors ni A ni B n'est inversible (valable si A ou B n'est pas carrée).
   S'il existe B non nulle telle que $AB = O_n$ alors A n'est pas inversible.
5. $D = diag(\delta_1, \delta_2, .., \delta_n)$ est inversible si et ssi $\forall i \in [\![1,n]\!], \delta_i \neq 0$. Le cas échéant, $D^{-1} = diag\left(\frac{1}{\delta_1}, \frac{1}{\delta_2}, .., \frac{1}{\delta_n}\right)$.
6. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$est inversible $\Leftrightarrow$ $\underbrace{ad - cb}_{\substack{\det(A) = \\ determinant\ de\ A}} \neq 0$. Et le cas échéant, $A^{-1} = \frac{1}{ad-cb}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.
7. Une matrice triangulaire est inversible sietssi sa diagonale n'a pas de 0. Et le cas échéant, son inverse est triangulaire.
8. Une matrice nilpotente n'est jamais inversible
9. Si N est nilpotente , alors $I \pm \beta N$ est inversible et $(I - N)^{-1} = \left(\sum_{k=0}^{p-1} N^k\right)$.
10. S' il existe un polynôme P, annulateur de A, tel que $P(A) = a_0 I_n + a_1 A + a_2 A^2 + .. + a_p A^p = O_n$ et $a_0 \neq 0$ alors A est inversible et $A^{-1} = -\left(\frac{a_1}{a_0} I_n + \frac{a_2}{a_0} A + .. + \frac{a_p}{a_0} A^{p-1}\right)$.
11. Si $A = PDP^{-1}$et D est une matrice inversible alors A est inversible et $A^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$. 35

DES EXERCICES-METHODES POUR PROUVER QU'UNE MATRICE A EST INVERSIBLE ET LE CAS ECHEANT, TROUVER A^{-1}.

Ex18 Sont-elles inversibles ? si oui donner leur inverse .

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix},\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\quad A = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2i \end{pmatrix}\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ex19 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^3. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}..

Ex20 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $(A + I)^3$. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}..
2. Que peut –on dire de $A + I$? Retrouver alors par une autre formule l'expression de A^{-1} ?

Ex21 Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 9 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} -9 & -2 & 3 \\ 9 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

1. Montrons que $P = \begin{pmatrix} -9 & -2 & 3 \\ 9 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible.
2. Montrer que : $AP = PD$. En déduire A^poù $p \in \mathbb{Z}$.

Ex22 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Montrons que A est inversible et trouver A^{-1}.