$\boldsymbol{M_n(K)}$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans K. est stable par combinaison linéaire, par addition matricielle, par multiplication externe et par produit matriciel.

Trace d'une matrice carrée Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$.
Les coefficients $a_{11}, a_{22}, .., a_{nn}$ constituent la diagonale de A . La **trace de A** est $tr(A) = a_{11} + a_{22} + .. + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. **24**

Matrices carrées particulières : Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$.
A est **diagonale** lorsque pour tous entiers $i \neq j$, $a_{ij} = 0$. On note parfois $A = diag(a_{11}, a_{22}, .., a_{nn})$.
A est **triangulaire supérieure** (resp. inférieure) lorsque ie. pour tous entiers $i > j$ $(resp\ i < j)$, $a_{ij} = 0$.
A est **symétrique** lorsque $A^T = A$ ie $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, a_{ij} = a_{ji}$.
A est **anti-symétrique** lorsque $A^T = -A$ ie $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, a_{ij} = -a_{ji}$.
On note $\boldsymbol{S_n(K)}$ $(\boldsymbol{resp\ A_n(K)})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans K symétriques (resp. anti-symétriques) . **26**
Rque : La matrice nulle est la seule matrice symétrique et antisymétrique

Puissances polynôme d'une matrice. Matrice nilpotente
•Soit $A \in M_n(K)$. $A^0 = I_n$ $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $A^p = A^{p-1}A = AA^{p-1} = A^p = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{p\ fois} \in M_n(K)$.
•Si $P(X) = a_0 \underbrace{1}_{=X^0} + a_1 X + a_2 X^2 + .. + a_p X^p \in K[X]$ alors $P(A) = a_0 I_n + a_1 A + a_2 A^2 + .. + a_p A^p \in M_n(K)$.
P est un polynôme annulateur de A lorsque $P(A) = O$.
•Une matrice carrée N est dite **nilpotente** lorsqu'il existe un entier naturel p tel que $N^p = O_n$; l'indice de nilpotence est l'entier p tel que $N^p = O_n$ et $N^{p-1} \neq O_n$). **29**

Propriétés de la trace démo
Soit $A\ et\ B$ deux matrices carrées d'ordre n et $\alpha\ et\ \beta$ deux scalaires.
1. $tr(\alpha A + \beta B) = \alpha tr(A) + \beta tr(B)$
2. $tr(A^T) = tr(A)$
3. $tr(AB) = tr(BA)$.
4. $tr(AA^T) = \sum_{\substack{i \in \{1,..,n\} \\ j \in \{1,..,p\}}} (a_{ij})^2 = somme\ des\ carrés\ de\ tous\ les\ coefficients\ de\ A$ **25**

Propriétés des matrices diagonales et triangulaires : Soit $\alpha, \beta \in K$
Une combinaison linéaire ou un produit de deux matrices diagonales (resp. triangulaires supérieures, resp. inférieures) de même taille est diagonale (resp. triangulaire sup., resp. inf.). démo
Si $D = diag(d_1, d_2, .., d_n)$ et $L = diag(\delta_1, \delta_2, .., \delta_n)$ alors
$\alpha D + \beta L = diag(\alpha d_1 + \beta\delta_1, \alpha d_2 + \beta\delta_2, .., \alpha d_n + \beta\delta_n)$ et $DL = diag(\delta_1 d_1, \delta_2 d_2, .., \delta_n d_n)$.
Si $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ & \lambda_2 & * & \vdots \\ & & \ddots & * \\ (0) & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ $et\ B = \begin{pmatrix} \delta_1 & * & \cdots & * \\ & \delta_2 & * & \vdots \\ & & \ddots & * \\ (0) & & & \delta_n \end{pmatrix}$ alors $AB = \begin{pmatrix} \lambda_1\delta_1 & * & \cdots & * \\ & \lambda_2\delta_2 & * & \vdots \\ & & \ddots & * \\ (0) & & & \lambda_n\delta_n \end{pmatrix}$. **27**

Propriétés des matrices symétriques et antisymétriques démo
Toute combinaison linéaire de matrices symétriques (resp. anti-symétriques) carrées d'ordre n est symétrique (resp. anti-symétrique).
$S_n(K)$ $(resp\ A_n(K))$ est donc stable par combinaison linéaire (par somme et multiplication par un scalaire) mais ne sont pas stables par produit matriciel
Toute matrice M carrée d'ordre n s'écrit de manière unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice anti-symétrique et cette écriture est : $M = \underbrace{\frac{1}{2}(M + M^T)}_{symétrique} + \underbrace{\frac{1}{2}(M - M^T)}_{anti-symétrique}$. **28**

Règles de calcul des puissances et polynômes de matrices
1. $Si\ P = BQ + R$ où $(Q,R) \in K[X]^2$alors $P(A) = B(A)Q(A) + R(A)$
2. Soit A une matrice carrée d'ordre n et α un scalaire. $(\alpha A)^p = \alpha^p A^p$.
3. Si $(A,B) \in M_n(K)^2$ tq $A\ et\ B$ commutent ie $AB = BA$ alors
   - $\alpha A\ et\ \beta B$ commutent où $(\alpha, \beta) \in K^2 et$ $(AB)^p = A^p B^p$.
   - $(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} B^k A^{p-k}$
   - $A^{p+1} - B^{p+1} = (A-B)(\sum_{k=0}^{p} A^k B^{p-k}) = (A-B)(\sum_{k=0}^{p} B^k A^{p-k})$.
4. pour toute matrice A carrée d'ordre n, $(I_n + A)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k$et
   $I_n - A^{p+1} = (I - A)(\sum_{k=0}^{p} A^k)$.
5. Si N est nilpotente d'indice p alors $\forall k \geq p, N^k = O_n$ et $\forall \alpha \in K, \alpha N$ est nilpotente. **30**

Puissances de matrices particulières démo
Soit $p \in \mathbb{N}$.
1. Si $D = diag(\delta_1, \delta_2, .., \delta_n)$ alors $D^p = diag({\delta_1}^p, {\delta_2}^p, .., {\delta_n}^p)$.
2. $(I_n)^p = I_n\ et\ (\alpha I_n)^p = \alpha^p I_n$
3. Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \in M_n(K)$. $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\underbrace{J^p = n^{p-1}J}_{\text{non valable pour } p=0}$.
4. Si $N \in M_n(\mathbb{R})$ est triangulaire avec diagonale nulle alors N est nilpotente d'indice au plus n. **31**

Ex9 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il n'existe pas de matrices A et B carrées d'ordre n telles que $AB - BA = I_n$.
Ex10 Montrer que si A est une matrice à coefficients réels alors : $A = 0 \Leftrightarrow tr(AA^T) = 0$. Que se passe-t-il si A est à coefficients complexes ?
Ex11 Soit $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n)$avec tous les λ_k distincts. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.
Montrer que : $A\ et\ D$ commutent $si\ et\ ssi$ A est diagonale.
Ex12 Montrons que pour toute matrice $carrée\ A$, $\frac{1}{2}(A + A^T)$ est symétrique et $\frac{1}{2}(A - A^T)$ est antisymétrique.
Montrons que pour toute matrice A (pas nécessairement carrée), $AA^T\ et\ A^TA$ sont symétriques.

METHODE POUR CALCULER DES PUISSANCES DE MATRICES

Ex13 $Soit\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A^n\ tq\ n \in \mathbb{N}$.
Ex14 $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $M^p\ tq\ p \in \mathbb{N}$.
Ex15 : $Soit\ A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. Calculer $A^p tq\ p \in \mathbb{N}$.
Ex16 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & -3 \\ 3 & 3 & -5 \end{pmatrix}$ et $P(t) = (t-1)(t+2)$. Calculer $P(A)$.En déduire A^p tq $p \in \mathbb{N}$.
Ex17 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
1) Ecrire A^2 comme combinaison linéaire de $A\ et\ I$.
2) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists (u_n, v_n) \in \mathbb{R}^2$tel que : $A^n = u_n A + v_n I$.
3) A l'aide des suites $\alpha\ et\ \beta$ telles que $\alpha_n = 2u_n + v_n$ et $\beta_n = u_n - v_n$, exprimer $u_n\ et\ v_n$ en fonction de n ; en déduire A^n (tableau matriciel).
3) Proposer deux autres méthodes pour trouver A^n