

# Matrices

$K$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Les éléments de  $K$  sont appelés des scalaires (ce sont des réels ou des complexes).

Lorsque cela n'est pas précisé,  $n, p, q$  et  $m$  sont des entiers naturels non nuls.

## I Opérations sur les matrices.

### 1. Définitions

**1 Définition :** Une matrice  $n$  lignes et  $p$  colonnes (ou de type  $(n, p)$  ou de type  $n \times p$ ) à coefficients dans  $K$  est un tableau  $n$  lignes et  $p$  colonnes remplies d'éléments de  $K$ .

On note  $M_{n,p}(K)$  l'ensemble des matrices  $n$  lignes et  $p$  colonnes à coefficients dans  $K$ .

**2 Notation :** si  $A$  est une matrice  $n$  lignes et  $p$  colonnes à coefficients dans  $K$  alors on numérote les lignes de  $A$  de 1 à  $n$  et les colonnes de  $A$  de 1 à  $p$  et on note :

$a_{ij} = a$  le scalaire rangé dans le tableau  $A$  qui se situe sur la ligne  $i$  et la colonne  $j$ .

$i$  premier indice  
 $j$  deuxième indice  
 = indice de ligne  
 = indice de colonne

$$A \text{ est notée : } A = (a_{ij})_{\substack{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ j \in \llbracket 1, p \rrbracket}} \text{ ou } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p-1} & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2p-1} & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip-1} & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np-1} & a_{np} \end{pmatrix}.$$

**3 Exercice :** Soit  $A = (a_{kl})_{\substack{k \in \llbracket 1, 5 \rrbracket \\ l \in \llbracket 1, 4 \rrbracket}}$  telle que  $\forall (k, l) \in \llbracket 1, 4 \rrbracket \times \llbracket 1, 5 \rrbracket, a_{kl} = \begin{cases} kl & \text{si } k + l \text{ pair} \\ \frac{1}{k} & \text{sinon} \end{cases}$ . Ecrire  $A$  sous forme d'un tableau.

**4 Définition :**  $a_{ij}$  est un élément de  $K$  et est appelé le coefficient ligne  $i$  colonne  $j$  de  $A$

Donc,  $a_{ji}$  est le coefficient ligne  $j$  et colonne  $i$ .

**5 Définition :** Deux matrices sont égales lorsqu'elles ont la même dimension et les mêmes coefficients.

### 2. Matrices particulières

- La **matrice nulle**,  $n$  lignes  $p$  colonnes est la matrice,  $n$  lignes  $p$  colonnes dont tous les coefficients sont nuls. On la note  **$O$  ou  $(O)$  ou  $O_{n,p}$**  s'il y a ambiguïté.
- Une **matrice carrée** est une matrice dont le nombre de lignes est égal au nombre de colonnes. Une **matrice  $A$  carrée d'ordre  $n$**  est une matrice carrée à  $n$  lignes,  $n$  colonnes. Les coefficients  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$  constituent la **diagonale de  $A$** .
- La **matrice identité d'ordre  $n$**  est la matrice carrée  $n$  lignes,  $n$  colonnes dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux de la diagonale qui valent 1. On la note  **$I$  ou  $I_n$** .

Exemple:  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \dots$

**6**  $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\delta_{ij})_{\substack{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ j \in \llbracket 1, n \rrbracket}}$  tel que :  $\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$  (symbole de Kronecker).

- Une **matrice colonne** est une matrice ne comportant qu'une seule colonne.
- Une **matrice ligne** est une matrice ne comportant qu'une seule ligne.

**7 Notation :** dans la suite du cours, on notera souvent  $M_{ij}$  le coefficient ligne  $i$  colonne  $j$  de la matrice  $M$ ....

Par exemple,  $(2A - BC)_{ij}$  est le coefficient ligne  $i$  et colonne  $j$  de  $2A - BC$ .

Cela évitera parfois d'introduire trop de lettres !!

### 3. Addition et multiplication par un scalaire.

#### 8 Définition - Somme de deux matrices et multiplication d'une matrice par un scalaire :

Soit  $A = (a_{ij})_{\substack{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ j \in \llbracket 1, p \rrbracket}}$  et  $B = (b_{ij})_{\substack{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ j \in \llbracket 1, p \rrbracket}}$  deux matrices  $n$  lignes  $p$  colonnes à coefficients dans  $K$  et  $k$  un scalaire.

Par définition,  $A + B$  et  $kA$  (ou  $k \cdot A$ ) sont les deux matrices  $n$  lignes  $p$  colonnes à coefficients dans  $K$  définies par :

$A + B = (s_{ij})_{\substack{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ j \in \llbracket 1, p \rrbracket}}$  et  $k \cdot A = (m_{ij})_{\substack{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ j \in \llbracket 1, p \rrbracket}}$  telles que  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, s_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$  et  $m_{ij} = k \times a_{ij}$  ♥

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} & \cdots & a_{1p-1} + b_{1p-1} & a_{1p} + b_{1p} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} & \cdots & a_{2p-1} + b_{2p-1} & a_{2p} + b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i1} + b_{i1} & a_{i2} + b_{i2} & a_{i3} + b_{i3} & \cdots & a_{ip-1} + b_{ip-1} & a_{ip} + b_{ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & a_{n3} + b_{n3} & \cdots & a_{np-1} + b_{np-1} & a_{np} + b_{np} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad k \cdot A = \begin{pmatrix} ka_{11} & \cdots & ka_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{n1} & \cdots & ka_{np} \end{pmatrix}.$$

Si  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux scalaires, alors  $\alpha A + \beta B = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} + \beta b_{11} & \cdots & \alpha a_{1p} + \beta b_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{n1} + \beta b_{n1} & \cdots & \alpha a_{np} + \beta b_{np} \end{pmatrix} \in M_{n,p}(K)$  est combinaison linéaire de  $A$  et  $B$

**Généralisation :** Une combinaison linéaire des matrices  $A_1, \dots, A_s$  de  $M_{n,p}(K)$  est toute matrice de la forme  $\lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_s A_s$  telle que  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  scalaires.

**NB :** On ne peut additionner ou faire des combinaisons linéaires que des matrices de même taille.

#### 9 Remarques:

1. Si  $A$  et  $B$  sont des matrices  $n$  lignes  $p$  colonnes à coefficients dans  $K$ , alors  $A + B$  et  $kA$  et  $\alpha A + \beta B$  sont encore des matrices  $n$  lignes et  $p$  colonnes à coefficients dans  $K$ . On dit que  $M_{n,p}(K)$  est stable par addition et multiplication par un scalaire et par combinaison linéaire.

2. La ligne  $i$  (resp. colonne  $j$ ) de  $A + B$  est égale la somme des lignes  $i$  (resp. colonnes  $j$ ) de  $A$  et de  $B$ .

La ligne  $i$  (resp. colonne  $j$ ) de  $kA$  est égale au produit de  $k$  et de la ligne  $i$  (resp. colonne  $j$ ) de  $A$ .

**10 Propriétés : premières règles de calcul.** Soit  $A, B$  et  $C$  trois matrices de  $M_{n,p}(K)$  et  $\alpha$  et  $\beta$  deux scalaires .

- |  |   |
|--|---|
| 1. $A + (B + C) = (A + B) + C$ et $A + B = B + A$                                    | L'addition matricielle est associative et commutative.                                    |
| 2. $A + O_{np} = A + O_{np} = A$   | $O_{np}$ est l'élément neutre de l'addition matricielle.                                  |
| 3. $A + (-1)A = O_{np}$  | $(-1)A$ notée $-A$ est le symétrique de $A$ pour l'addition.                              |
| 4. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ et $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ | La multiplication externe est distributive à gauche et à droite sur l'addition dans $K$ . |
| 5. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A) = \beta(\alpha A)$                              | L'associativité mixte entre multiplication externe et produit dans $K$ .                  |
| 6. $\alpha A = O \Leftrightarrow A = O$ ou $\alpha = 0$ .                            |   |

### 4. Produit matriciel

#### 11 Exemples

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{1 \times 5}$   
 $\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{+ 2 \times 6}$   
 $\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{+ 3 \times 7}$   
 $\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{+ 4 \times 8}$

Ils sont tout seuls !  $\rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 6 & (-1) \\ 7 & (-2) \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 10 & (-2) & (-3) \\ (-1) & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{pmatrix}$$

**Produit impossible!** Ce produit n'existe pas.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 10 & (-2) & (-3) \\ (-1) & 4 & 5 \\ 0 & 1 & (-5) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 6 & (-1) \\ 7 & (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38 & -8 \\ 17 & 8 \\ 54 & -14 \\ (-29) & 9 \end{pmatrix}$$



**17 BILAN ET MISE EN GARDE :** Les règles de calcul sur les matrices sont presque les mêmes que dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  **sauf .....**

**ATTENTION Très souvent :**

- $AB$  existe mais  $BA$  n'existe pas. Même quand  $AB$  et  $BA$  existent,  $AB$  et  $BA$  n'ont pas forcément la même dimension.
- Même quand  $AB$  et  $BA$  existent et ont la même dimension, on a  $AB \neq BA$ . ♥

Exemple :  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . **Le produit matriciel n'est pas commutatif.**

Quand deux matrices vérifient  $AB = BA$ , on dit que ces deux matrices commutent.....c'est rare.

- Il peut arriver que  $AB = O$  avec  $B \neq O$  et  $A \neq O$ . Donc,  $AB = O \nRightarrow B = O$  ou  $A = O$ . ♥ et  $A^2 = O \nRightarrow A = O$ .

Exemple :  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $B = A$ . **Le produit matriciel n'est pas intègre**

- Il peut arriver que  $AB = AC$  et  $B \neq C$  Donc,  $AB = AC \nRightarrow B = C$ . ♥

Exemple :  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$  et  $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ . **Certaines matrices n'ont pas d'inverse pour la multiplication et on ne divise par une matrice. On multiplie par  $A^{-1}$  lorsqu'elle existe.**

## 5. Transposition

**18 Définition :** Soit  $A = (a_{ij})_{\substack{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ j \in \llbracket 1, p \rrbracket}}$  une matrice de type  $(n, p)$ . La matrice transposée de  $A$  est la matrice notée  $A^T$  de type  $(p, n)$  et définie par : le coefficient ligne  $i$  colonne  $j$  de  $A^T$  est égal au coefficient ligne  $j$  colonne  $i$  de  $A$ . Autrement dit,  $A^T = (u_{ij})_{\substack{i \in \llbracket 1, p \rrbracket \\ j \in \llbracket 1, n \rrbracket}}$  telle que  $u_{ij} = a_{ji}$ . Autrement dit,  $\forall (k, l) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket, (A^T)_{lk} = A_{kl}$ .

**19 Exercice :** Si  $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 6 & (-1) \\ 7 & (-2) \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$  alors  $A^T = \dots \dots$

**20 Remarque :** la ligne  $i$  de  $A^T$  est la colonne  $i$  de  $A$  et la colonne  $j$  de  $A^T$  est la ligne  $j$  de  $A$ .

**21 Règles de calcul:** Soit  $A$  et  $B$  deux matrices.

1.  $(A^T)^T = A$ .
2. Si  $A$  et  $B$  sont de même type et  $\alpha, \beta$  des scalaires alors  $(\alpha A + \beta B)^T = \alpha A^T + \beta B^T$ .
3. Si  $AB$  existe alors  $B^T A^T$  existe et  $(AB)^T = B^T A^T$ .

## 6. Matrices élémentaires.

**22 Définition :** Une matrice élémentaire est une matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf un coefficient qui vaut 1. Dans  $M_{n,p}(K)$  on note  $E_{ij}$  la matrice élémentaire dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient ligne  $i$  et colonne  $j$  qui vaut 1.

**23 Propriété :** Pour tous  $i$  et  $k$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$  et tous  $j$  et  $l$  dans  $\llbracket 1, p \rrbracket$   $E_{ij} E_{kl} = \delta_{jk} E_{il}$ .

**24 Théorème :** Toute matrice  $M$  de  $M_{n,p}(K)$  s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des matrices élémentaires  $E_{ij}$  telle que  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket, j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ . Et plus précisément, si  $M = (m_{ij})$  alors  $M = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p m_{ij} E_{ij}$ .

## II Matrices d'opérations élémentaires. Algorithme de Gauss-Jordan.

### 1. Opérations élémentaires sur les lignes

**25 Définitions des opérations élémentaires et des matrices d'opérations élémentaires.**

Les opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice sont : échanger deux lignes de  $A$  (notée  $L_i \leftrightarrow L_j$ ) multiplier une ligne par un scalaire non nul (notée  $L_i \leftarrow \lambda L_i$ ) et ajouter à une ligne une autre ligne multipliée par un scalaire (notée  $L_i \leftarrow L_i + \beta L_j$ ).

Deux matrices  $A$  et  $B$  sont équivalentes par lignes lorsque l'on passe de l'une à l'autre en faisant une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes. Deux telles matrices sont nécessairement de même dimension. On note alors  $A \sim_l B$ .



3) Le rang d'une matrice  $A$  est égal au nombre de pivots de toute matrice échelonnée équivalente par ligne à  $A$

4) Soit  $A$  une matrice carrée d'ordre  $n$ .  $rg(A) = n$  si et seulement si  $A$  est équivalente par lignes à  $I_n$ .

37 Exemple : Soit  $C \in M_{n,1}(\mathbb{R})$  dont le coefficient ligne  $i$  est  $c_i = i$  et  $A = (a_{ij})_{(i,j) \in [1,n]^2}$  telle que :  $a_{ij} = \frac{i}{j}$ . Calculer  $A^2$ ,  $rg(A)$  et Calculer  $AC$ . Résoudre  $AX = C$ .

### 3. Application à la résolution de systèmes linéaires

38 Soit le système linéaire  $(S)$  : 
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$
 d'inconnue  $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in K^p$ .

1. Les scalaires  $a_{ij}$  sont appelés les coefficients de  $(S)$  et  $b_1, \dots, b_n$  le second membre.
2.  $(S)$  est échelonné lorsque en passant d'une ligne de  $(S)$  à la suivante, au moins une inconnue « disparaît » (cette inconnue disparue a en fait son coefficient nul).
3.  $(S)$  est de Cramer lorsque  $n = p$  et  $(S)$  admet une unique solution.
4.  $(S)$  est compatible lorsque  $(S)$  admet au moins une solution.  $(S)$  est incompatible lorsque  $(S)$  n'admet aucune solution.
5. A ce système  $(S)$ , on associe

➤ le système linéaire homogène  $(SH)$  : 
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{np}x_p = 0 \end{cases}$$

➤  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$  la matrice des coefficients de  $(S)$ . Par définition, le rang de  $(S) = rg(S) = rg(A)$ .

➤  $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$  la matrice du second membre de  $(S)$ .

6. Opérations élémentaires et réversibles sur  $(S)$  :
  - échanger deux lignes de  $(S)$  (notée  $L_i \leftrightarrow L_j$ )
  - multiplier une ligne de  $(S)$  par un scalaire non nul (notée  $L_i \leftarrow \lambda L_i$ )
  - ajouter à une ligne de  $(S)$  une autre ligne de  $(S)$  multipliée par un scalaire (notée  $L_i \leftarrow L_i + \beta L_j$ ).
7. Deux systèmes linéaires  $(S)$  et  $(S')$  sont équivalents lorsqu'on passe de l'un à l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires. On note alors  $(S) \Leftrightarrow (S')$

#### 39 Propriété :

1. Deux systèmes équivalents ont les mêmes solutions.
2. En posant  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ ,  $[(S) \Leftrightarrow AX = B]$  et  $[(SH) \Leftrightarrow AX = 0]$ .
3.  $(S)$  est échelonnée dès que sa matrice  $A$  est échelonnée.
4. Echelonner  $A$  en lignes et faire en parallèle les mêmes opérations sur le second membre  $B$  permet d'échelonner  $(S)$ .

40 Théorème : Si  $X_0$  est une solution particulière de  $(S)$  alors les solutions de  $(S)$  sont toutes les matrices de la forme  $X_0 + Y$  où  $Y$  solution de  $(SH)$ .

41 Théorème de Gauss-Jordan. Tout système linéaire est équivalent à un système linéaire échelonné.

42 Propriété : Un système linéaire  $(S)$  est de Cramer si et seulement si  $(S)$  est un système à  $n$  équations et  $n$  inconnues et  $rg(S) = n$ .

### 4. Et en colonnes ?

43 Théorème : Soit  $A$  une matrice de type  $(n, p)$ .

Faire subir  $C_i \leftrightarrow C_j$  à  $A$  revient à multiplier  $A$  à droite par  $T_{ij}$ .

Faire subir  $C_i \leftarrow \lambda C_i$  à  $A$  revient à multiplier  $A$  à droite par  $D_i(\lambda)$ .

Faire subir  $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$  à  $A$  revient à multiplier  $A$  à droite par  $H_{ij}(\lambda)$ .

**44 Théorème :** Soit  $A$  une matrice de type  $(n, p)$ . Il existe une unique matrice  $V$  échelonnée réduite par colonne (\*\*\*) de type  $(n, p)$  et une matrice inversible  $Q$ , carrée d'ordre  $n$  et produit de matrices d'opérations élémentaires, telles que :  $A = VQ$ .

(\*\*) cela signifie que : Soit  $V$  est nulle (ce qui signifierait que  $A$  est nulle) - Soit  $V$  vérifie : 1) si l'une de ses colonnes est nulle toutes les suivantes le sont aussi  
2) chaque colonne débute par davantage de 0 que la précédente.  
3) chaque colonne non nulle a son premier coefficient non nul égal à 1 appelé pivot  
4) le pivot est le seul élément non nul de sa ligne.

**45 Théorème (admis):** Avec les notations des théorèmes 44 et 33  $rgA = rgR = rgV$ .

**46 Csq :** On peut échelonner une matrice en ligne et/ou en colonne pour obtenir son rang et

$$\forall A \in M_{n,p}(K), rg(A) = rg(A^T) \leq \min(n, p).$$

### III Matrices carrées . Ensemble $M_n(K)$ .

#### 1. Définition. Opérations. Premières règles de calcul.

**47 Définitions :** Une matrice  $A = (a_{ij})$  carrée d'ordre  $n$  à coefficients dans  $K$  est une matrice  $n$  lignes et  $n$  colonnes à coefficients dans  $K$ . Les coefficients  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$  constituent la diagonale de  $A$ .

On note  $M_n(K)$  (et non  $M_{n,n}(K)$ ) l'ensemble des matrices carrées d'ordre  $n$  à coefficients dans  $K$ .

**48 NB :** D'après ce qui précède, toute somme, combinaison linéaire et tout produit de matrices carrées d'ordre  $n$  sont des matrices carrées d'ordre  $n$ . **Toutes les règles de calcul vues précédemment s'appliquent dans  $M_n(K)$ .** Donc,

$M_n(K)$  est stable par combinaison linéaire, par addition matricielle, par multiplication externe et par produit matriciel.

**49 Définition :** Soit  $A = (a_{ij})$  une matrice carrée d'ordre  $n$  à coefficients dans  $K$ . La **trace de  $A$** , notée  $tr(A)$ , est la somme des coefficients de la diagonale de  $A$ . Autrement dit,  $tr(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ .

#### 50 Propriétés de la trace A SAVOIR DEMONTRER :

Soit  $A$  et  $B$  deux matrices carrées d'ordre  $n$  et  $\alpha$  et  $\beta$  deux scalaires.

1.  $tr(\alpha A + \beta B) = \alpha tr(A) + \beta tr(B)$
2.  $tr(A^T) = tr(A)$
3.  $tr(AB) = tr(BA)$ .

**50 bis Exercice :** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer qu'il n'existe pas de matrices  $A$  et  $B$  carrées d'ordre  $n$  telles que  $AB - BA = I_n$ .

**51 A SAVOIR DEMONTRER :** Soit  $A = (a_{ij})$  une matrice rectangulaire de type  $(n, p)$ .

Alors,  $tr(AA^T) = \sum_{i \in \{1, \dots, n\}} \sum_{j \in \{1, \dots, p\}} (a_{ij})^2 =$  somme des carrés de tous les coefficients de  $A$ .

**52 Exercice :** Montrer que si  $A$  est une matrice à coefficients réels alors :  $A = 0 \Leftrightarrow tr(AA^T) = 0$ . Que se passe-t-il si  $A$  est à coefficients complexes ?

#### 2. Matrices carrées particulières

**53 Rappel :** On note  $O$  ou  $O_n$  la matrice carrée d'ordre  $n$  nulle et  $I$  ou  $I_n$  la matrice identité d'ordre  $n$ .

##### a) Matrices diagonales

**54 Définition :** Soit  $A = (a_{ij})$  carrée d'ordre  $n$ .  $A$  est diagonale lorsque tous ses coefficients en dehors de la diagonale sont nuls ie. pour tous entiers  $i \neq j$ ,  $a_{ij} = 0$ . On note parfois  $A = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ .

On note  $D_n(K)$  l'ensemble des matrices carrées d'ordre  $n$  à coefficients dans  $K$  diagonales.

**55 Exemple :**  $O_n$  et  $I_n$  sont diagonales.

**56 Propriétés :** Soit  $\alpha$  et  $\beta$  deux scalaires. Si  $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$  et  $L = \text{diag}(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$  alors  $\alpha D + \beta L = \text{diag}(\alpha d_1 + \beta \delta_1, \alpha d_2 + \beta \delta_2, \dots, \alpha d_n + \beta \delta_n)$  et  $DL = \text{diag}(\delta_1 d_1, \delta_2 d_2, \dots, \delta_n d_n)$ .

Par conséquent, toute combinaison linéaire et tout produit de deux matrices diagonales carrées d'ordre  $n$  sont des matrices diagonales carrées d'ordre  $n$ .  $D_n(K)$  est donc stable par combinaison linéaire (en particulier par somme et multiplication par un scalaire) et par produit.

**57 Exercice.** Soit  $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  avec tous les  $\lambda_k$  distincts. Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . Montrer que :  $A$  et  $D$  commutent si et ssi  $A$  est diagonale.

## b) Matrices triangulaires

**58 Définitions :** Soit  $A = (a_{ij})$  carrée d'ordre  $n$ .  $A$  est triangulaire supérieure (resp. inférieure) lorsque tous ses coefficients en dessous (resp. au dessus) de la diagonale sont nuls ie. pour tous entiers  $i > j$  (resp  $i < j$ ),  $a_{ij} = 0$ .  
On note  $TS_n(K)$  (resp  $TI_n(K)$ ) l'ensemble des matrices carrées d'ordre  $n$  à coefficients dans  $K$  et triangulaires supérieures (resp. inférieures) .

**59 Remarques :** 1. Si  $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$  triangulaire supérieure alors  $A^T = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & d & 0 \\ c & e & f \end{pmatrix}$  triangulaire inférieure.

2. Les matrices diagonales sont les matrices triangulaires supérieures et inférieures à la fois.

**60 Propriétés** Toute combinaison linéaire et tout produit de matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) carrées d'ordre  $n$  sont des matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) carrées d'ordre  $n$  .

Et, Si  $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ & \lambda_2 & * & \vdots \\ & & \ddots & * \\ (0) & & & \lambda_n \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} \delta_1 & * & \dots & * \\ & \delta_2 & * & \vdots \\ & & \ddots & * \\ (0) & & & \delta_n \end{pmatrix}$  alors  $AB = \begin{pmatrix} \lambda_1\delta_1 & * & \dots & * \\ & \lambda_2\delta_2 & * & \vdots \\ & & \ddots & * \\ (0) & & & \lambda_n\delta_n \end{pmatrix}$ .

$TS_n(K)$  (resp  $TI_n(K)$ ) est donc stable par combinaison linéaire (en particulier, par somme et multiplication par un scalaire) et par produit.

## c) Matrices (anti)symétriques

**61 Définitions :** Soit  $A = (a_{ij})$  carrée d'ordre  $n$ .

1.  $A$  est symétrique lorsque  $A^T = A$  ie  $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, a_{ij} = a_{ji}$ .

2.  $A$  est anti-symétrique lorsque  $A^T = -A$  ie  $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, a_{ij} = -a_{ji}$ .

On note  $S_n(K)$  (resp  $AS_n(K)$ ) l'ensemble des matrices carrées d'ordre  $n$  à coefficients dans  $K$  symétriques (resp. anti-symétriques) .

**62 Exemples :**  $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$  symétrique et  $B = \begin{pmatrix} 0 & -b & -c \\ b & 0 & -e \\ c & e & 0 \end{pmatrix}$  anti-symétrique. Toute matrice diagonale est symétrique.

**63 Exercice** Montrons que pour toute matrice carrée  $A, \frac{1}{2}(A + A^T)$  et  $\frac{1}{2}(A - A^T)$  est symétrique et  $\frac{1}{2}(A - A^T)$  est antisymétrique.  
Montrons que pour toute matrice  $A$  (pas nécessairement carrée),  $AA^T$  et  $A^T A$  sont symétriques.

**64 Propriétés :** La matrice nulle est la seule matrice symétrique et antisymétrique.

La diagonale d'une matrice anti-symétrique est nulle .

**65 Propriétés** Toute combinaison linéaire de matrices symétriques (resp. anti-symétriques) carrées d'ordre  $n$  est symétrique (resp. anti-symétrique) carrée d'ordre  $n$  .

$S_n(K)$  (resp  $AS_n(K)$ ) est donc stable par combinaison linéaire (par somme et multiplication par un scalaire).

**66 Attention :**  $S_n(K)$  et  $AS_n(K)$  ne sont pas stables par produit matriciel car  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & 5 \\ 10 & * \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & * \\ * & * \end{pmatrix}$ .

**67 Théorème :** Toute matrice  $M$  carrée d'ordre  $n$  s'écrit de manière unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice anti-symétrique Cette écriture est :  $M = \underbrace{\frac{1}{2}(M + M^T)}_{\text{symétrique}} + \underbrace{\frac{1}{2}(M - M^T)}_{\text{anti-symétrique}}$  .

## 3. Puissances d'une matrice carrée.

**68 Définition** Soit  $A \in M_n(K)$  . Par convention,  $A^0 = I_n$ .

Par définition, pour tout entier naturel  $p$  non nul ,  $A^p = A^{p-1}A = AA^{p-1} = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{p \text{ fois}}$  .

Si  $P(X) = a_0 \underbrace{1}_{=X^0} + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_pX^p \in K[X]$  alors par définition,  $P(A) = a_0I_n + a_1A + a_2A^2 + \dots + a_pA^p$ .  $P$  est un polynôme annulateur de  $A$  lorsque  $P(A) = O$ .

**69NB :**

1)  $A^p$  et  $P(A)$  sont alors des matrices carrées d'ordre  $n$  .

2) Si tel que  $P = Q + R$  (resp.  $P = QR$ ) où  $(Q, R) \in K[X]^2$  alors  $P(A) = Q(A) + R(A)$  (resp.  $P(A) = Q(A)R(A)$ ).

**70 Exemples à connaître :** Soit  $p \in \mathbb{N}$ .

1. Soit  $A$  une matrice carrée d'ordre  $n$  et  $\alpha$  un scalaire. Alors,  $(\alpha A)^p = \alpha^p A^p$ .
2. Si  $(A, B) \in M_n(K)^2$  tq  $A$  et  $B$  commutent ie  $AB = BA$  alors  $\alpha A$  et  $\beta B$  commutent où  $(\alpha, \beta) \in K^2$  et  $(AB)^p = A^p B^p$ .
3. Si  $D = \text{diag}(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$  alors  $D^p = \text{diag}(\delta_1^p, \delta_2^p, \dots, \delta_n^p)$ .
4.  $(I_n)^p = I_n$  et  $(\alpha I_n)^p = \alpha^p I_n$
5. Soit  $J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in M_n(K)$ . Alors  $\forall p \in \mathbb{N}^*, J^p = n^{p-1} J$ . **Attention non valable pour  $p = 0$ .**

**71 Définition :** Une matrice carrée  $N$  est dite nilpotente lorsqu'il existe un entier naturel  $p$  tel que  $N^p = O_n$ .

Le plus petit entier naturel  $p$  tel que  $N^p = O_n$  s'appelle l'indice de nilpotence. (on a nécessairement  $N^p = O_n$  et  $N^{p-1} \neq O_n$ ).

**72 NB :** Si  $N$  est une matrice nilpotente et  $\alpha \in K$  alors  $\alpha N$  est nilpotente car  $(\alpha N)^p = \alpha^p N^p$

**72bis Exemples à connaître :** 1) Toute matrice carrée d'ordre  $n$  de la forme  $N = \begin{pmatrix} 0 & * & \dots & * \\ & 0 & * & \vdots \\ & & \ddots & * \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix}$  ou  $N = \begin{pmatrix} 0 & & & (0) \\ * & 0 & & \\ & & \ddots & \\ * & * & & 0 \end{pmatrix}$  (ie.

$N$  triangulaire avec diagonale nulle) est nilpotente d'indice au plus  $n$ .

**73 Proposition : Formule du binôme de Newton et formule de factorisation.**

$A$  et  $B$  sont deux matrices carrées d'ordre  $n$  et  $p$  est un entier naturel.

Si  $A$  et  $B$  commutent ie.  $AB = BA$  alors  $(A + B)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} A^k B^{p-k} = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} B^k A^{p-k}$

et si, de plus,  $p \neq 0$  alors  $A^p - B^p = (A - B) \left( \sum_{k=0}^{p-1} A^k B^{p-1-k} \right) = (A - B) \left( \sum_{k=0}^{p-1} B^k A^{p-1-k} \right)$ .

**74 Cas particulier,** pour toute matrice carrée  $A$ ,  $(I + A)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} A^k$  et si, de plus,  $p \neq 0$  alors  $I - A^p = (I - A) \left( \sum_{k=0}^{p-1} A^k \right)$ .

**75 Quelques méthodes pour obtenir les puissances d'une matrice carrée  $M$  :**

**76 Ou bien :** on calcule quelques itérés  $M^2, M^3, M^4$  pour voir si une formule apparaît. On démontre la conjecture par récurrence.

**Exercice :** Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ . Calculer  $A^n$  tq  $n \in \mathbb{N}$ .

**77 Ou bien :** on décompose  $M$  comme somme de deux matrices qui commutent et dont on sait calculer les puissances (matrices diagonales,  $J = (1)$ , matrices nilpotentes ...). Puis, on applique la formule de binôme de Newton. (Cf exemple 50)

**Exercice :**  $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  Calculer  $M^p$  tq  $p \in \mathbb{N}$ .

**Exercice :** Soit  $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ . Calculer  $A^p$  tq  $p \in \mathbb{N}$ .

**78 Ou bien :** il existe un polynôme  $P$  annulateur de  $M$  i.e. un polynôme  $P$  tq  $P(M) = 0$ .

**79 SOIT :** Je cherche le reste  $R$  de la division euclidienne de  $X^p$  par  $P$ .

Alors,  $X^p = P(X)Q(X) + R(X)$  donc  $M^p = \underbrace{P(M)}_{=0} Q(M) + R(M) = R(M)$ .

**Exercice :** Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & -3 \\ 3 & 3 & -5 \end{pmatrix}$  et  $P(t) = (t-1)(t+2)$ . Calculer  $P(A)$ . En déduire  $A^p$  tq  $p \in \mathbb{N}$ .

**80 SOIT :** la relation  $P(M) = 0$  permet d'obtenir un  $M^d$  d'écrire comme combinaison linéaire des premiers itérés de  $M$  : par exemple  $P(M) = 2M^4 + 4M^3 - M^2 + M - 2I = 0$ . Donc,  $M^4 = -2M^3 + \frac{1}{2}M^2 - \frac{1}{2}M + I$ . On montre alors par récurrence que  $\forall k, \exists (a_k, b_k, c_k, d_k) \in \mathbb{R}^4 / M^k = a_k M^3 + b_k M^2 + c_k M + d_k I$  et on essaie d'établir des relations de récurrence vérifiées par les suites  $(a_k), (b_k), (c_k), (d_k)$ . On essaiera ensuite de trouver une expression explicite de  $(a_k), (b_k), (c_k)$  et  $(d_k)$ .

**Exercice** Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . 1) Ecrire  $A^2$  comme combinaison linéaire de  $A$  et  $I$ .

2) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}$ , il existe deux réels  $u_n$  et  $v_n$  tels que :  $A^n = u_n A + v_n I$ .

3) A l'aide des suites  $\alpha$  et  $\beta$  telles que  $\alpha_n = 2u_n + v_n$  et  $\beta_n = u_n - v_n$ , exprimer  $u_n$  et  $v_n$  en fonction de  $n$  puis donner  $A^n$  sous forme d'un tableau matriciel.

**81 Ou bien** on effectue un « changement de base » en trouvant une matrice inversible  $P$  telle que :  $M = PDP^{-1}$  et  $D$  est une matrice dont on sait calculer les puissances ou itérés. Alors,  $M^k = PD^k P^{-1}$  (Cf paragraphe suivant).

# IV Matrices carrées inversibles. Ensemble $GL_n(K)$ .

## 1. Définition

**82 Définition :** La matrice  $A$  carrée d'ordre  $n$  est inversible lorsqu'il existe une matrice  $B$  carrée d'ordre  $n$  telle que :  $AB = I_n = BA$ .

Une telle matrice  $B$  est unique, s'appelle l'inverse de  $A$  et on note  $B = A^{-1}$ .

Ainsi, lorsque  $A^{-1}$  existe, elle vérifie  $AA^{-1} = I_n = A^{-1}A$ .

On note  $GL_n(K)$  l'ensemble des matrices carrées d'ordre  $n$  à coefficients dans  $K$  et inversibles.

**NB :** une matrice non carrée n'est jamais inversible !

**83 Applications : résolution d'équations matricielles, de systèmes linéaires.**

Si  $A$  est inversible alors :  $AB = AC \Leftrightarrow B = C$

Si  $A$  est inversible alors :  $AX = Y \Leftrightarrow X = A^{-1}Y$

## 2. Exemples importants

**84 Exemples à connaître . ♥ ♥ :**

1.  $I_n$  est inversible et  $I_n = I_n^{-1}$ .  $O_n$  n'est pas inversible .

2. Toute matrice d'opération élémentaire est inversible et

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \forall \lambda \in K^*, \forall \beta \in K, \quad T_{ij}^{-1} = T_{ij}, \quad D_i(\lambda)^{-1} = D_i\left(\frac{1}{\lambda}\right) \quad \text{et} \quad H_{ij}(\beta) = H_{ij}(-\beta)$$

3. Si  $A$  et  $B$  sont non nulles et vérifient  $AB = O_n$  alors ni  $A$  ni  $B$  n'est inversible (valable si  $A$  ou  $B$  n'est pas carrée).

Ou encore s'il existe  $B$  non nulle telle que  $AB = O_n$  alors  $A$  n'est pas inversible

4. Si une ligne (resp. colonne) de  $A$  est combinaison linéaire des autres lignes (resp. colonnes) de  $A$  alors  $A$  n'est pas inversible. En particulier, si  $A$  contient une ligne ou une colonne nulle alors  $A$  n'est pas inversible.

5. Une matrice nilpotente  $N$  (telle que  $N^p = 0$ ) n'est pas inversible mais  $I \pm \beta N$  est inversible et  $(I - N)^{-1} = \left(\sum_{k=0}^{p-1} N^k\right)$ .

6. S'il existe un polynôme  $P$  non constant tel que  $P(A) = a_0 I_n + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + a_p A^p = O_n$  et  $a_0 \neq 0$  alors  $A$  est inversible et

$$A^{-1} = -\left(\frac{a_1}{a_0} I_n + \frac{a_2}{a_0} A + \dots + \frac{a_p}{a_0} A^{p-1}\right).$$

7. Soit  $D = \text{diag}(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$  matrice diagonale.

$D$  est inversible si et ssi  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \delta_i \neq 0$ . Le cas échéant,  $D^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{\delta_1}, \frac{1}{\delta_2}, \dots, \frac{1}{\delta_n}\right)$ .

8. Soit  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . Alors,  $A$  est inversible  $\Leftrightarrow \frac{ad - cb}{\det(A) = \text{determinant de } A} \neq 0$ . Et le cas échéant,  $A^{-1} = \frac{1}{ad - cb} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ .

9. Soit  $T$  triangulaire. Alors  $T$  est inversible si et ssi sa diagonale n'a pas de 0. Et le cas échéant,  $T^{-1}$  est triangulaire.

**RQUE :** S'il existe  $P = \sum_{k=1}^p a_k X^k = XQ(X)$  tel que :  $P$  non constant,  $a_0 = 0$ ,  $P(A) = O$  et  $Q(A) \neq O$  alors  $A$  n'est pas inversible d'après 3.

## 3. Opérations sur les matrices inversibles

**85 Propriétés : Inverse, produit et transposée de matrices inversibles.**

Soit  $P$  et  $Q$  deux matrices carrées d'ordre  $n$ ,  $\alpha$  scalaire non nul et  $k$  un entier naturel.

Si  $P$  et  $Q$  sont inversibles alors  $P^{-1}$ ,  $\alpha P$ ,  $P^T$ ,  $PQ$  et  $P^k$  sont inversibles et

$$(P^{-1})^{-1} = P \text{ et } (\alpha P)^{-1} = \frac{1}{\alpha} P^{-1}, \quad (P^T)^{-1} = (P^{-1})^T, \quad (PQ)^{-1} = Q^{-1} P^{-1} \text{ et } (P^k)^{-1} = (P^{-1})^k.$$

**86 NB** Une somme ou combinaison linéaire de matrices inversibles n'est pas forcément inversible.  $\cancel{\text{lex}} \begin{matrix} I_n \\ \text{inversible} \end{matrix} + \begin{matrix} (-I_n) \\ \text{inversible} \end{matrix} = \begin{matrix} 0 \\ \text{non} \\ \text{inversible} \end{matrix}$ .

**86bis** Contraposée : si  $AB$  n'est pas inversible alors  $A$  ou  $B$  n'est pas inversible et par suite si  $A$  est inversible et  $AB$  ne l'est pas alors  $B$  ne l'est pas.

**87**  $GL_n(K)$  n'est pas stable par addition ni combinaison linéaire mais est stable par produit et passage à l'inverse.

**88 Définition :** Lorsque  $P$  est inversible, on définit  $P^{-k}$  avec  $k \in \mathbb{N}$  de la manière suivante :  $P^{-k} = (P^{-1})^k$ . Et d'après ce qui précède,  $P^{-k} = (P^{-1})^k = (P^k)^{-1}$ . Ainsi si  $P$  est inversible alors on donne un sens à toutes les puissances  $P^k$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ .

**89 Un résultat très utile à comprendre et savoir retrouver :** Si  $A = P^{-1}BP$  alors  $\forall k \in \mathbb{N}, A^k = P^{-1}B^kP$ ; si, de plus,  $B$  est inversible alors  $A$  est inversible et  $\forall k \in \mathbb{Z}, A^k = P^{-1}B^kP$ .

## 4. Caractérisations d'une matrice inversible.

**89 Lemme :** Soit  $A$  une matrice de type  $(n, p)$ . Il existe une unique matrice  $R$  échelonnée réduite par ligne de type  $(n, p)$  et une matrice inversible  $P$ , carrée d'ordre  $n$  et produit de matrices d'opérations élémentaires, telles que :  $A = PR$ .

**Démo :** D'après le théorème de Gauss Jordan, il existe une unique matrice  $R$  échelonnée réduite par ligne équivalente par ligne à  $A$  i.e. obtenue en faisant une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes de  $A$ . Cette suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes de  $A$  se traduit par un produit à gauche de  $A$  par une suite finie de matrices d'opérations élémentaires notées  $P_1, P_2, \dots, P_m$ . Ainsi  $R = \underbrace{P_1 P_2 \dots P_m}_{=Q} A = QA$  où  $Q$  est inversible car  $P_1, P_2, \dots, P_m$  le sont.

Alors  $A = \underbrace{Q^{-1}}_{=P} R$ .

**90 Théorème de caractérisation de l'inversibilité** ♥ ♥ : Soit  $A$  une matrice carrée d'ordre  $n$

(a)  $A$  est inversible si et ssi il existe une matrice  $B$  telle que  $BA = I_n$  (b).

$A$  est inversible si et ssi le système  $AX = 0$ , d'inconnue  $X \in M_{n,1}(K)$ , a une unique solution (qui est  $X = 0_{n,1}$ ) (c)

$A$  est inversible si et ssi  $rg(A) = n$  (d)

$A$  est inversible si et ssi  $A \sim I_n$  (e)

$A$  est inversible si et ssi  $A$  est un produit fini de matrices d'opérations élémentaires. (f)

**90bis Par contraposée :**  $A$  n'est pas inversible si et ssi il existe une matrice colonne  $X$  non nulle telle que  $AX = 0$ .

**91 Conséquence :** Soit  $M$  une matrice  $n$  lignes et  $p$  colonnes et  $P$  et  $Q$  deux matrices carrées inversibles d'ordre  $n$  et  $p$ .

Alors  $rg(M) = rg(PM) = rg(MQ)$ . Autrement dit, multiplier une matrice par une matrice inversible ne change pas son rang.

**Démo :** Soient  $P$  et  $Q$  carrées d'ordre  $n$  et  $p$  et inversibles. Alors  $P$  et  $Q$  sont des produits finis de matrices d'opérations élémentaires. Donc multiplier  $M$  à gauche par  $P$  revient à faire une suite d'opérations élémentaires sur les lignes de  $M$  et multiplier  $M$  à droite par  $Q$  revient à faire une suite finie d'opérations élémentaires sur les colonnes de  $A$ . Donc  $PM$  et  $MQ$  ont le même rang que  $M$ .

**92 Théorème :**  $A$  est inversible si et ssi il existe une matrice  $B$  telle que  $AB = I_n$  ou  $BA = I_n$ .

**93 Théorème :**

1.  $A$  est inversible si et ssi l'un des systèmes linéaires associés à  $A$  est de Cramer.

2.  $A$  est inversible si et ssi tout système linéaire associé à  $A$  est de Cramer.

3.  $A$  est inversible si et ssi pour toute matrice colonne  $Y$ , le système  $AX = Y$  a une unique solution. Le cas échéant, l'unique solution de  $AX = Y$  est alors,  $X = A^{-1}Y$ .

**94 Théorème :** Soit  $A$  une matrice carrée d'ordre  $n$ .

$A$  n'est pas inversible si et ssi l'une de ses lignes (resp. colonnes) est combinaison linéaire de ses autres lignes (resp. colonnes).

**Démo :**  $A$  n'est pas inversible

si et ssi il existe une matrice colonne  $X$  non nul tq  $AX = 0$  si et ssi il existe une matrice carrée  $B$  non nulle tq  $AB = 0$ .  
en posant  $B$  la matrice dont toutes les colonnes valent  $X$ .

si et ssi  $\exists \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(K) / \text{l'un } x_j \text{ est non nul et } \sum_{i=1}^n x_i C_i = 0$

si et ssi  $\exists \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(K), \exists j \in \llbracket 1, n \rrbracket / x_j \neq 0 \text{ et } x_j C_j = -\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n x_i C_i$ .

si et ssi  $\exists \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(K), \exists j \in \llbracket 1, n \rrbracket / x_j \neq 0 \text{ et } C_j = -\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \frac{x_i}{x_j} C_i$ .

si et ssi  $\exists (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{j-1}, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_n) \in K^{n-1} / C_j = -\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \lambda_i C_i$ .

si et ssi l'une des colonnes de  $A$  est combinaison linéaire des autres colonnes de  $A$ .

$A$  n'est pas inversible si et ssi  $(A^T)$  n'est pas inversible

si et ssi l'une des colonnes de  $A^T$  est combinaison linéaire des autres colonnes de  $A^T$ .

si et ssi l'une des lignes de  $A$  est combinaison linéaire des autres lignes de  $A$ .

## 5. Méthodes pratiques pour savoir si une matrice carrée $A$ est inversible et le cas échéant, calculer son inverse.

**95 En pratique :** pour prouver que  $A$  est inversible et le cas échéant, trouver  $A^{-1}$ .

- **96 OU BIEN** L'énoncé donne l'expression de  $A^{-1}$ . On nomme  $B$  la matrice proposée. Dans ce cas, on vérifie simplement que  $AB = I_n$ . Alors on peut conclure que  $A$  est inversible et  $A^{-1} = B$ .
- **97 OU BIEN**  $A$  a l'une des formes suivantes : diagonale, carrée d'ordre 2, nilpotente, égale à  $I \pm N$  avec  $N$  nilpotente, produit de deux matrices inversibles, transposée ou puissance d'une matrice inversible. Alors je sais dire si  $A$  est inversible ou non et je sais donner  $A^{-1}$  lorsqu'elle existe.
- **98 OU BIEN** L'énoncé propose de vérifier que  $P(A) = 0$  avec  $P$  polynôme. Alors je vais conclure suivant la valeur du terme constant de  $P$ .

**Exemple :** Soit  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ . Calculer  $(A + I)^3$ . En déduire que  $A$  est inversible et déterminer  $A^{-1}$  comme combinaison linéaire de  $A^2$ ,  $A$  et  $I$ .

Que peut-on dire de  $A + I$ ? Retrouver alors par une autre formule l'expression de  $A^{-1}$ ?

- **99 OU BIEN** L'énoncé ne donne que la matrice  $A$ . Je cherche à savoir si  $A$  est inversible ou non et le cas échéant à déterminer  $A^{-1}$ . Je peux calculer  $\det(A)$  (Cf paragraphe suivant) pour savoir si  $A$  est inversible mais cela ne donnera pas l'expression de  $A^{-1}$ . Je peux répondre aux deux questions en même temps en appliquant l'une des deux méthodes suivantes au choix :

✓ **100 Première méthode :** Je prends  $Y = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$  quelconque. Je résous le système  $AX = Y$  d'inconnue  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ .

- Dès que le système a une équation de compatibilité i.e.  $rg(A) \leq n - 1$  (i.e. pour certains  $Y$  le système n'a aucune ou a plein de solution) alors  $A$  n'est pas inversible.
- Si  $rg(A) = n$  i.e. pour tout  $Y$ , le système a une unique solution  $X$  alors  $A$  est inversible et je lis  $A^{-1}$  en écrivant la solution du système sous la forme  $X = A^{-1}Y$ . (on a  $AX = Y \Leftrightarrow X = A^{-1}Y$ )

**Exercice :** Montrons que  $P = \begin{pmatrix} -9 & -2 & 3 \\ 9 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  est inversible.

✓ **101 Deuxième méthode :** J'échelonne la matrice  $A$  en opérant sur ses lignes et je fais en parallèle les mêmes opérations sur  $I_n$ .

En effet, il existe une unique matrice échelonnée réduite par lignes telle que :  $A \sim_L R$ . Je vais faire des opérations élémentaires sur les lignes de  $A$  pour obtenir  $R$  et en parallèle je fais ces mêmes opérations sur  $I_n$ . J'obtiens alors une matrice  $Q$  carrée d'ordre  $n$  telle que  $I_n \sim_L Q$ .

- Si  $R \neq I_n$  alors  $A$  n'est pas inversible.
- Si  $R = I_n$  alors  $A$  est inversible et il existe  $P$  inversible telle que  $PA = R = I_n$  avec  $P$  produit des matrices des opérations élémentaires effectuées pour passer de  $A$  à  $R$ . Ainsi,  $P = A^{-1}$ . Ayant fait subir à  $I_n$  les mêmes opérations, j'ai donc  $PI_n = P$ . Alors,  $P = A^{-1}$ .

$A^{-1}$  est alors la matrice obtenue en faisant subir à  $I_n$  les mêmes opérations que celles faites pour transformer  $A$  en  $I_n$ .

**Exercice :** Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ . Montrons que  $A$  est inversible et trouver  $A^{-1}$ .

- **102 OU BIEN** Si  $A = PDP^{-1}$  et  $D$  est une matrice inversible alors  $A$  est inversible et  $A^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$ .

**Exemple :** Soit  $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 9 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $P = \begin{pmatrix} -9 & -2 & 3 \\ 9 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  et  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ . Montrer que :  $AP = PD$ . En déduire  $A^p$  où  $p \in \mathbb{Z}$ .

**103 En pratique :** pour prouver que  $A$  est inversible, on pourra aussi calculer  $rg(A)$  ou  $\det(A)$ . (Cf chapitre suivant !). Par contre, cela ne donne pas l'expression de  $A^{-1}$ .

## 6. Matrices équivalentes. Matrices semblables.

**104 Définition :** Soit  $A$  et  $B$  deux matrices de même taille.

On dit que  $A$  est équivalente à  $B$  lorsqu'il existe deux matrices inversibles  $P$  et  $Q$  telles que  $A = PBQ$ . On note  $A \sim B$ .

On dit que  $A$  est semblable à  $B$  lorsqu'il existe une matrice inversible  $P$  telle que  $A = P^{-1}BP$ .

**105 Propriétés :** Deux matrices semblables sont équivalentes. Deux matrices équivalentes ont le même rang.

Toute matrice est semblable (resp. équivalente) à elle-même. Si  $A$  est semblable (resp. équivalente) à  $B$  alors  $B$  est semblable (resp. équivalente) à  $A$ .  $A$  est semblable (resp. équivalente) à  $B$  et  $B$  est semblable (resp. équivalente) à  $C$  alors  $A$  est semblable (resp. équivalente) à  $C$ .

Deux matrices semblables ont le même déterminant (Cf chapitre suivant).