

Définition du déterminant d'une matrice carrée d'ordre 1, 2, 3 ou 4

1. **Déterminant d'ordre 1:** Le déterminant de la matrice $M = (a)$ carrée d'ordre 1 est le scalaire $\det M = a$.

2. **Déterminant d'ordre 2:** Le déterminant de $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est le scalaire noté $\det(M)$ ou $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ tq: $\det(M) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} ad - cb$.

3. **Déterminant d'ordre 3:** Le déterminant de $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$ est le scalaire $\det(M)$ ou $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix}$ tq:

$$\det(M) = \begin{vmatrix} a^+ & b^- & c^+ \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} +a \begin{vmatrix} e & f \\ h & k \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & k \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} = a(ek - fh) - b(dk - fg) + c(dh - eg)$$

développement par rapport à la première ligne

Ou encore: $\det(M) = \begin{vmatrix} a^+ & b & c \\ d^- & e & f \\ g^+ & h & k \end{vmatrix} = +a \begin{vmatrix} e & f \\ h & k \end{vmatrix} - d \begin{vmatrix} b & c \\ h & k \end{vmatrix} + g \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} = a(ek - fh) - d(bk - ch) + g(bf - ce)$

développement par rapport à la première colonne

Ou encore: $\det(M) = \begin{vmatrix} a & b^- & c \\ d & e^+ & f \\ g & h^- & k \end{vmatrix} = -b \begin{vmatrix} d & f \\ g & k \end{vmatrix} + e \begin{vmatrix} a & c \\ g & k \end{vmatrix} - h \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}$

développement par rapport à la deuxième colonne

Ou encore: $\det(M) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g^+ & h^- & k^+ \end{vmatrix} = g \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} - h \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$

développement par rapport à la dernière ligne

les signes attribués aux coefficients sont toujours positifs sur la diagonale et alternés.

4. **Déterminant d'ordre 4.** Le déterminant de $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$ est le scalaire

$$\det(M) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = -a_{14} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} + a_{24} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} - a_{34} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} + a_{44} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

développement par rapport à la dernière colonne ... 1

les signes attribués aux coefficients sont toujours positifs sur la diagonale et alternés.

Formule générale du déterminant d'une matrice carrée. Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$.

Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on note A_{ij} est la matrice carrée d'ordre $n - 1$ obtenue en enlevant la ligne i et la colonne j à A .

Alors, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\det(A) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+j} a_{kj} \det(A_{kj}) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$

développement par rapport à la colonne j

Et pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$

développement par rapport à la ligne i

Déterminant d'une matrice triangulaire :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ * & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ * & \dots & * & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & * & \dots & * \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^n a_{kk}$$

Cas particulier : $\det(I_n) = 1$ et $\det(\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) = \prod_{k=1}^n \lambda_k$.

Règles de calcul : *Démo partielle*

Soient α et β deux scalaires et A et B deux matrices carrées d'ordre n . On note C_i la colonne i de A .

1. **Si on échange deux colonnes de la matrice alors le déterminant change de signe.**

Par exemple, pour $n = 3$, $\det(C_3 \ C_2 \ C_1) = -\det(C_1 \ C_2 \ C_3)$

2. **det est linéaire par rapport à chaque colonne**

Par exemple, pour $n = 3$,

$$\det(\alpha C_1 + \beta C'_1 \ C_2 \ C_3) = \alpha \det(C_1 \ C_2 \ C_3) + \beta \det(C'_1 \ C_2 \ C_3)$$

$$\det(C_1 \ \alpha C_2 + \beta C'_2 \ C_3) = \alpha \det(C_1 \ C_2 \ C_3) + \beta \det(C_1 \ C'_2 \ C_3)$$

$$\det(C_1 \ C_2 \ \alpha C_3 + \beta C'_3) = \alpha \det(C_1 \ C_2 \ C_3) + \beta \det(C_1 \ C_2 \ C'_3)$$

3. **det(AB) = det(A) × det(B)**

4. **det(A^T) = det(A)**

Conséquences

5. **Si l'une des colonnes est combinaison linéaire des autres colonnes alors le déterminant est nul.** En particulier, si deux colonnes sont proportionnelles alors le déterminant est nul.

Par exemple, pour $n = 3$, $\det(C_1 \ \alpha C_1 + \beta C_3 \ C_3) = 0$.

Si on ajoute à l'une des colonnes une combinaison linéaire des autres colonnes alors on ne change pas le déterminant. Par

exemple, pour $n = 3$, $\det(C_1 \ C_2 + \alpha C_1 + \beta C_3 \ C_3) = \det(C_1 \ C_2 \ C_3)$

6. **Si on multiplie une colonne par un scalaire α alors le déterminant de la matrice obtenue est égal au déterminant de la matrice initial multiplié par α .**

Par exemple, pour $n = 3$, $\det(\alpha C_1 \ C_2 \ C_3) = \alpha \det(C_1 \ C_2 \ C_3)$

7. **Si A carrée d'ordre n alors $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$**

Par exemple, pour $n = 3$, $\det(\alpha C_1 \ \alpha C_2 \ \alpha C_3) = \alpha^3 \det(C_1 \ C_2 \ C_3)$

8. **Toutes ces propriétés sont vraies en remplaçant colonne par ligne :**

- Si on échange deux lignes alors le déterminant change de signe.
- Si l'une des lignes est combinaison linéaire des autres lignes alors le déterminant est nul.
- Si on ajoute à l'une des lignes une combinaison linéaire des autres lignes alors on ne change pas le déterminant.
- Si on multiplie une ligne par un scalaire α alors le déterminant de la matrice obtenue est égal au déterminant de la matrice initiale multiplié par α .

NB : Opérations élémentaires et déterminants

Si A $\xrightarrow{C_i \leftrightarrow C_j}$ A' alors $\det(A) = -\det(A')$.

Si A $\xrightarrow{C_i \leftarrow \alpha C_i, \alpha \neq 0}$ A' alors $\det(A) = \frac{1}{\alpha} \det(A')$.

Si A $\xrightarrow{C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j}$ A' alors $\det(A) = \det(A')$. **Idem en ligne** 4

En pratique, pour calculer $\det(A)$, on effectue des opérations élémentaires sur A pour obtenir une matrice triangulaire T tout en modifiant le déterminant en conséquence à chaque opération. 5

Caractérisation de l'inversibilité. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. *Démo*

1. **A inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.**

2. Si A est inversible alors $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} = [\det(A)]^{-1}$. 6