DL Polynômes

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1. Trouver des polynômes P_0, P_1 et P_2 dans $\mathbb{R}[X]$ tels que :
   $\forall\theta \in \mathbb{R}$, $\tilde{P}_0(\cos(\theta)) = 1$, $\tilde{P}_1(\cos(\theta)) = \cos(\theta)$ *et* $\tilde{P}_2(\cos(\theta)) = \cos(2\theta)$
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ *et* $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminer de deux manières la partie réelle de $\left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right)^n$.
3. En déduire que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que : $\forall\theta \in \mathbb{R}$, $\tilde{P}_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons qu'un tel polynôme P_n est unique.
5. Montrer que $\deg(P_n) = n$ (où $n \in \mathbb{N}$).
6. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $U_n = \sum_{0\le 2k\le n} \binom{n}{2k}$ *et* $V_n = \sum_{0\le 2k+1\le n} \binom{n}{2k+1}$. Calculer $U_n + V_n$ *et* $U_n - V_n$.
7. En déduire $\mathrm{codom}(P_n)$ (où $n \in \mathbb{N}$).
8. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer les racines réelles de P_n comprises entre -1 *et* 1.
9. En déduire que P_n (où $n \in \mathbb{N}$) est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples toutes comprises entre -1 *et* 1 et donner cette forme scindée.
10. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$. $P_{n+1} = 2XP_n - P_{n-1}$.
11. Retrouver, grâce à cette relation, le terme dominant de P_n (où $n \in \mathbb{N}$).
12. En utilisant les résultats précédents, donner les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$.
13. En déduire que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ *et* $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = -\frac{\sqrt{5}+1}{4}$.
14. Rappeler pourquoi $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ sont les abscisses de 4 des sommets d'une pentagone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique. On donnera les affixes des 5 sommets.
15. Montrer que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ sont les abscisses des points communs entre l'axe réel et le cercle (C) de centre $\Omega(-\frac{1}{4}, 0)$, de rayon $\frac{\sqrt{5}}{4}$.
16. Déduire de ce qui précède une construction à la règle <u>non graduée</u> et au compas mais sans rapporteur d'un pentagone régulier.