

# Corrigé du Ds 5

## Exercice 1

Soit  $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)} dt$ .

1. Montrer que  $f$  est définie sur  $D = ]0,1[ \cup ]1, +\infty[$ .

Posons  $g(t) = \frac{1}{\ln(t)}$ . Alors  $g$  est continue sur les deux intervalles  $]0,1[$  et  $]1, +\infty[$ .

Si  $x \in ]1, +\infty[$  alors  $x^2 \in ]1, +\infty[$  (on a  $1 < x < x^2 < 1$ ); le cours assure alors que si  $x \in ]1, +\infty[$  alors  $\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)} dt$ .

De même, si  $x \in ]0,1[$  alors  $x^2 \in ]0,1[$  (on a  $0 < x^2 < x < 1$ ); le cours assure alors que si  $x \in ]0,1[$  alors  $\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)} dt$ .

2. Montrer que  $f$  est dérivable sur  $D$  et déterminer une expression de  $f'$  sur  $D$ .

Le TFI assure que sur chaque intervalle  $]0,1[$  et  $]1, +\infty[$ ,  $g$  admet une primitive notée  $H$  sur  $]0,1[$  et  $G$  sur  $]1, +\infty[$ .

Alors comme pour tout  $x \in ]1, +\infty[$ ,  $x^2 \in ]1, +\infty[$ , le TFCI assure que  $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)} dt = G(x^2) - G(x)$ .

Comme  $G$  et  $(x \mapsto x^2)$  sont de classe  $C^1$  sur  $]1, +\infty[$  et  $\forall x \in ]1, +\infty[$ ,  $x^2 \in ]1, +\infty[$ ,  $(x \mapsto G(x^2))$  est aussi de classe  $C^1$  sur  $]1, +\infty[$  et par conséquent,  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $]1, +\infty[$  comme somme de deux telles fonctions. Et  $\forall x \in ]1, +\infty[$ ,

$$f'(x) = 2xG'(x^2) - G'(x) = 2xg(x^2) - g(x) = \frac{2x}{\ln(x^2)} - \frac{1}{\ln(x)} = \frac{2x}{2\ln(x)} - \frac{1}{\ln(x)} = \frac{x-1}{\ln(x)}$$

On fait de même sur  $]0,1[$  et on obtient aussi :  $\forall x \in ]0,1[$ ,  $f'(x) = \frac{x-1}{\ln(x)}$ . Ainsi,  $\forall x \in D$ ,  $f'(x) = \frac{x-1}{\ln(x)}$ .

3. En déduire les variations de  $f$  sur  $D$ .

$\forall x \in ]1, +\infty[$ ,  $x-1 > 0$  et  $\ln(x) > 0$  donc  $f'(x) > 0$ . Ainsi  $f$  est strictement croissante sur l'intervalle  $]1, +\infty[$ .

$\forall x \in ]0,1[$ ,  $x-1 < 0$  et  $\ln(x) < 0$  donc  $f'(x) > 0$ . Ainsi  $f$  est strictement croissante sur l'intervalle  $]0,1[$ .

4. Déterminer la limite de  $f$  en 0. En déduire que  $f$  est prolongeable par continuité en 0. On note encore  $f$  son prolongement.

Soit  $x \in ]0,1[$ .  $\forall t \in ]x^2, x[$ ,  $\ln(x^2) \leq \ln(t) \leq \ln(x) < 0$  i.e.  $2\ln(x) \leq \ln(t) \leq \ln(x) < 0$ ;

donc,  $\frac{1}{\ln(x)} \leq g(t) \leq \frac{1}{2\ln(x)} < 0$ ; puis par croissance et positivité de l'opérateur intégral sur  $[x^2, x]$ ,

$$\int_{x^2}^x \frac{1}{\ln(t)} dt \leq \int_{x^2}^x g(t) dt \leq \int_{x^2}^x \frac{1}{2\ln(x)} dt < 0 \text{ i.e. } \frac{(x-x^2)}{\ln(x)} \leq -f(x) \leq \frac{x-x^2}{2\ln(x)} < 0.$$

Ainsi,  $\forall x \in ]0,1[$ ,  $0 < \frac{x^2-x}{\ln(x)} \leq f(x) \leq \frac{x^2-x}{2\ln(x)}$ .

Or,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-x}{\ln(x)} = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-x}{2\ln(x)}$ . Donc le théorème de limite par encadrement assure que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ . Comme la limite de  $f$  en 0 est finie et vaut 0,  $f$  est prolongeable par continuité en 0 par la valeur 0. Désormais  $f(0) = 0$ .

5. Montrer que  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $[0,1[ \cup ]1, +\infty[$ .

Appliquons le critère de classe  $C^1$  sur  $]0,1[$ :

$f$  est dérivable donc continue sur  $]0,1[$  et  $\forall x \in ]0,1[$ ,  $f'(x) = \frac{x-1}{\ln(x)}$ . Donc  $f'$  est continue au moins sur  $]0,1[$ . Ainsi  $f$  est de classe  $C^1$

au moins sur  $]0,1[$ . De plus,  $f$  est continue en 0 d'après ce qui précède. Enfin,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{\ln(x)} = 0$  donc,  $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0$  limite finie. Le

critère de classe  $C^1$  assure alors que  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $[0,1[$  et  $f'(0) = 0$ . Comme  $\forall x \in ]1, +\infty[$ ,  $f'(x) = \frac{x-1}{\ln(x)}$ ,  $f'$  est continue au moins sur  $]1, +\infty[$  donc  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $[0,1[ \cup ]1, +\infty[$ .

6. Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

Soit  $x \in ]1, +\infty[$ .  $\forall t \in ]x, x^2[$ ,  $0 < \ln(x) \leq \ln(t) \leq \ln(x^2)$  i.e.  $0 < \ln(x) \leq \ln(t) \leq 2\ln(x)$ ;

donc,  $0 < \frac{1}{2\ln(x)} \leq g(t) \leq \frac{1}{\ln(x)}$ ; puis par croissance et positivité de l'opérateur intégral sur  $[x, x^2]$ ,

$$0 < \int_x^{x^2} \frac{1}{2\ln(x)} dt \leq \int_x^{x^2} g(t) dt \leq \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(x)} dt \text{ i.e. } 0 < \frac{x^2-x}{2\ln(x)} \leq f(x) \leq \frac{x^2-x}{\ln(x)}$$

Ainsi,  $\forall x \in ]1, +\infty[$ ,  $0 < \frac{x^2-x}{2\ln(x)} \leq f(x) \leq \frac{x^2-x}{\ln(x)}$

Or,  $\frac{x^2-x}{2\ln(x)} = \frac{x-1}{2} \times \frac{x}{\ln(x)}$ . Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln(x)} \stackrel{CC}{=} +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{2} = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-x}{2\ln(x)} = +\infty$ . Donc le théorème de limite par encadrement assure que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

7. Montrer que  $\forall x \in ]0,1[$ ,  $\int_x^{x^2} \frac{x^2}{t\ln(t)} dt \leq f(x) \leq \int_x^{x^2} \frac{x}{t\ln(t)} dt$ .

Il faut montrer que  $\forall x \in ]0,1[, \int_x^{x^2} \frac{x}{t \ln(t)} dt \leq \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)} dt \leq \int_x^{x^2} \frac{x^2}{t \ln(t)} dt$ . Pour cela, il suffit de montrer que  $\forall x \in ]0,1[, \forall t \in ]x^2, x[, \frac{x^2}{t \ln(t)} \leq \frac{1}{\ln(t)} \leq \frac{x}{t \ln(t)}$ .

Soit  $x \in ]0,1[, \forall t \in ]x^2, x[, 0 < x^2 \leq t \leq x$  donc  $0 < \frac{x^2}{t} \leq 1 \leq \frac{x}{t}$  puis  $0 > \frac{x^2}{t \ln(t)} \geq \frac{1}{\ln(t)} \geq \frac{x}{t \ln(t)}$  car  $\ln(t) < 0$ . Alors par croissance de l'intégrale sur  $[x^2, x]$ ,  $\int_{x^2}^x \frac{x^2}{t \ln(t)} dt \geq \int_{x^2}^x \frac{1}{\ln(t)} dt \geq \int_{x^2}^x \frac{x}{t \ln(t)} dt$ . Alors

$$\forall x \in ]0,1[, \int_x^{x^2} \frac{x^2}{t \ln(t)} dt \leq f(x) \leq \int_x^{x^2} \frac{x}{t \ln(t)} dt.$$

**8.** En déduire que  $f$  est prolongeable par continuité en 1. On note encore  $f$  son prolongement.

$$\forall x \in ]0,1[, x^2 \int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln(t)} dt \leq f(x) \leq x \int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln(t)} dt.$$

$$\text{Or, } \int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln(t)} dt = \int_x^{x^2} \frac{1}{t} \frac{1}{\ln(t)} dt = [\ln|\ln(t)|]_x^{x^2} = \ln|\ln(x^2)| - \ln|\ln(x)| = \ln|2 \ln(x)| - \ln|\ln(x)| = \ln(2) + \ln|\ln(x)| - \ln|\ln(x)| = \ln(2).$$

Donc,  $\forall x \in ]0,1[, x^2 \ln(2) \leq f(x) \leq x \ln(2)$ . Alors, par le théorème de limite par encadrement,  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \ln(2)$ .

On montre de la même manière que  $\forall x \in ]1, +\infty[, x \int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln(t)} dt \leq f(x) \leq x^2 \int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln(t)} dt$  i.e.  $x \ln(2) \leq f(x) \leq x^2 \ln(2)$ . Alors, par le théorème de limite par encadrement,  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \ln(2)$ .

Ainsi, par le théorème de limite par encadrement,  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \ln(2)$ . Donc,  $f$  est prolongeable par continuité en 1 par la valeur  $\ln(2)$ .

**9.** Montrer que  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^+$ .

Appliquons à nouveau le critère de classe  $C^1$ . D'après ce qui précède  $f$  est continue en 1 et de classe  $C^1$  au moins sur  $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ . De plus  $\forall x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}, f'(x) = \frac{x-1}{\ln(x)} \sim_1 1$ . Le critère de classe  $C^1$  assure alors que  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^+$  et  $f'(1) = 1$ .

**10.** Montrer que  $f$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^{++}$  et  $f''(1) = \frac{1}{2}$ . On donnera une expression de  $f''$ .

Appliquons le critère de classe  $C^2$ . D'après ce qui précède  $f$  est continue en 1 et de classe  $C^1$  au moins sur  $\mathbb{R}^{++}$  et  $\forall x > 0, f'(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{\ln(x)} & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$ . Comme  $(x \mapsto \frac{x-1}{\ln(x)})$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^{++} \setminus \{1\}$ ,  $f$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^{++} \setminus \{1\}$  et  $\forall x \in \mathbb{R}^{++} \setminus \{1\}, f''(x) = \frac{\ln(x) - \frac{x-1}{x}}{\ln(x)^2} = \frac{x \ln(x) - (x-1)}{x \ln^2(x)}$ .

Il reste à vérifier que  $\lim_{x \rightarrow 1} f''(x)$  existe et est finie. Posons  $h(t) = f(1+t) = \frac{(1+t) \ln(1+t) - t}{(1+t) (\ln(1+t))^2}$ .

$$\text{Alors, } h(t) = \frac{(1+t) \left( t - \frac{t^2}{2} + o_0(t^2) \right) - t}{(1+t) \ln^2(1+t)} = \frac{\frac{t^2}{2} + o_0(t^2)}{(1+t) (\ln(1+t))^2} \sim_0 \frac{\frac{t^2}{2}}{t^2} = \frac{1}{2}. \text{ Donc, } \lim_{x \rightarrow 1} f''(x) = \lim_{t \rightarrow 0} h(t) = \frac{1}{2}. \text{ Donc, le critère de classe}$$

$C^2$  s'applique :  $f$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^{++}$  et  $\forall x \in \mathbb{R}^{++} \setminus \{1\}, f''(x) = \frac{x \ln(x) - (x-1)}{x \ln^2(x)}$  et  $f''(1) = \frac{1}{2}$ .

**11.** Etudier la convexité de  $f$  sur  $\mathbb{R}^+$ .

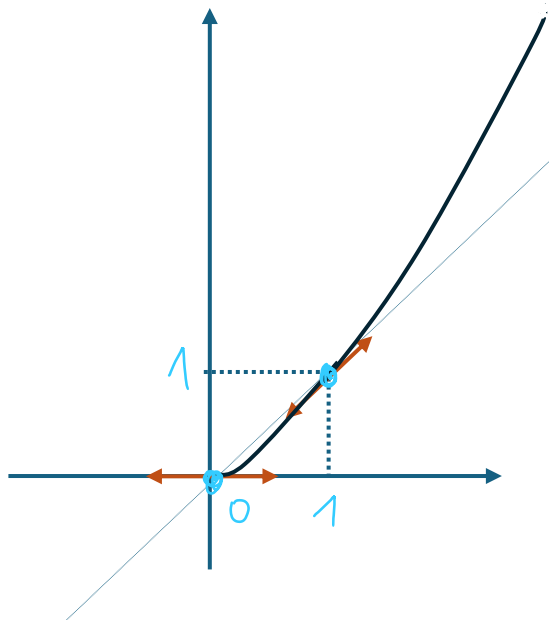
Etudions le signe de  $f''$ .

$$f''(1) = \frac{1}{2} > 0 \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}^{++} \setminus \{1\}, f''(x) = \frac{x \ln(x) - (x-1)}{x \ln^2(x)} \text{ est du signe de } \varphi(x) = x \ln(x) - (x-1). \varphi \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}^{++} \text{ et}$$

$\forall x \in \mathbb{R}^{++}, \varphi'(x) = 1 + \ln(x) - 1 = \ln(x)$ . Donc  $\varphi'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$ .  $\varphi$  est donc strictement croissante sur  $]1, +\infty[$  et

strictement décroissante sur  $]0,1[$ . De plus,  $\varphi(1) = 0$ . Donc  $\varphi$  est positive. Ainsi,  $\forall x \in \mathbb{R}^{++} \setminus \{1\}, f''(x) \geq 0$ . J'en déduis que  $f$  est convexe.

**12.** Représenter  $Cf$ .



**Exercice 2 Mines 2010**

**1. Préliminaire :** Soit un réel  $x$  positif. Montrer que  $\int_0^1 t^x dt$  existe et  $\int_0^1 t^x dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 t^x dt = \frac{1}{x+1}$ .

Soit  $x \geq 0$ .

$k : (t \mapsto t^x)$  est continue sur  $]0,1[$  et prolongeable par continuité en 0 par la valeur 0 si  $x > 0$  et par 1 si  $x = 0$ .

Donc  $\int_0^1 t^x dt$  existe.

De plus,  $K : (\varepsilon \mapsto \int_{\varepsilon}^1 t^x dt)$  est la primitive sur  $[0,1]$  de  $\tilde{k}$  qui s'annule en 1. Donc,  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 t^x dt = \int_1^0 t^x dt$  et par conséquent,  $\int_0^1 t^x dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 t^x dt$ .

Enfin,  $\int_{\varepsilon}^1 t^x dt = \left[ \frac{t^{x+1}}{x+1} \right]_{\varepsilon}^1 = \frac{1^{x+1}}{x+1} - \frac{\varepsilon^{x+1}}{x+1} = \frac{1}{x+1} - \frac{\varepsilon^{(x+1)\ln(\varepsilon)}}{x+1}$ . Comme  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (x+1) \ln(\varepsilon) = -\infty$ ,  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{(x+1)\ln(\varepsilon)} = 0$ . Ainsi,

$$\int_0^1 t^x dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 t^x dt = \frac{1}{x+1}$$

On pose pour tout réel  $x$  positif,  $\varphi(x) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^x} dt$ . On pose pour tout réel  $x$  positif et tout réel  $t$  de  $[0,1]$ ,  $f_x(t) = \frac{1}{1+t^x}$ .

**2.** Calculer  $\varphi(0)$ ,  $\varphi(1)$  et  $\varphi(2)$ .

$$\varphi(0) = \int_0^1 \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2}, \quad \varphi(1) = \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln(2) \quad \text{et} \quad \varphi(2) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = [\text{Arctan}(t)]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

**3.** Montrer que  $\varphi$  est croissante sur  $\mathbb{R}^+$ .

$$\text{Soit } 0 \leq x \leq y. \varphi(x) - \varphi(y) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^x} dt - \int_0^1 \frac{1}{1+t^y} dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t^x} - \frac{1}{1+t^y} dt = \int_0^1 \frac{t^y - t^x}{(1+t^x)(1+t^y)} dt = \int_0^1 \frac{e^{y \ln(t)} - e^{x \ln(t)}}{(1+t^x)(1+t^y)} dt (**).$$

Or,  $\forall t \in [0,1], (1+t^x)(1+t^y) > 0$  et  $\ln(t) < 0$  donc  $0 \geq x \ln(t) \geq y \ln(t)$  et par conséquent,  $e^{x \ln(t)} \geq e^{y \ln(t)}$  i.e.  $t^x \geq t^y$ .

Ainsi  $\forall t \in [0,1], \frac{e^{y \ln(t)} - e^{x \ln(t)}}{(1+t^x)(1+t^y)} \leq 0$ . Alors, par positivité de l'opérateur intégral sur  $[0,1]$ ,  $\varphi(x) - \varphi(y) \leq 0$ . Donc  $\varphi$  est croissante.

**4.** Montrer que pour tous réels  $x$  et  $y$  tels que  $0 \leq x \leq y$ ,  $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \int_0^1 (t^x - t^y) dt \leq y - x$ .

Soit  $0 \leq x \leq y$ .  $|\varphi(x) - \varphi(y)| \stackrel{\text{car } \varphi \text{ est croissante}}{=} \varphi(y) - \varphi(x) \stackrel{\text{d'après(**)}}{=} \int_0^1 \frac{t^x - t^y}{(1+t^x)(1+t^y)} dt$ . Or,  $\forall t \in [0,1], (1+t^x)(1+t^y) \geq 1$  et  $t^x - t^y \geq 0$  donc

$$0 \text{ donc } 0 \leq \frac{t^x - t^y}{(1+t^x)(1+t^y)} \leq t^x - t^y. \text{ Alors par croissance de l'opérateur intégral sur } [0,1], |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \int_0^1 (t^x - t^y) dt.$$

Or,  $\int_0^1 (t^x - t^y) dt = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{y+1} = \frac{y-x}{(x+1)(y+1)} \leq y-x$  car  $(x+1)(y+1) \geq 1$ . Ainsi,  $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \int_0^1 (t^x - t^y) dt \leq y-x$ .

**5.** En déduire que  $\varphi$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$ .

Fixons  $y$  réel positif.

$\forall x \in [0, y], |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq y-x$ . Comme  $\lim_{x \rightarrow y^-} y-x = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow y^-} \varphi(x) = \varphi(y)$ .

$\forall x \in ]y, +\infty[$ ,  $|\varphi(y) - \varphi(x)| \leq x-y$ . Comme  $\lim_{x \rightarrow y^+} x-y = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow y^+} \varphi(x) = \varphi(y)$ .

J'en déduis que  $\varphi$  est continue en  $y$ .

**6.** Montrer que pour tout réel  $x$  positif,  $1 - \varphi(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t^x} dt$ .

$$1 - \varphi(x) = \int_0^1 1 dt - \int_0^1 \frac{1}{1+t^x} dt = \int_0^1 1 - \frac{1}{1+t^x} dt = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t^x} dt.$$

**7.** En déduire que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 1$ .

$$|1 - \varphi(x)| = \left| \int_0^1 \frac{t^x}{1+t^x} dt \right| \leq \int_0^1 t^x dt \leq \int_0^1 t^x dt = \frac{1}{x+1}. \text{ Comme } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 1.$$

**8.** Montrer que : pour tout réel  $x$  positif,  $\varphi(x) = \frac{1}{2} + x \int_0^1 \frac{t^x}{(1+t^x)^2} dt$ .

$$\varphi(x) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^x} dt \stackrel{\text{IPP}}{=} \left[ \frac{t}{1+t^x} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t x t^{x-1}}{(1+t^x)^2} dt = \frac{1}{2} + x \int_0^1 \frac{t^x}{(1+t^x)^2} dt.$$

**9.** En déduire que  $\varphi$  est dérivable en 0 et  $\varphi'(0) = \frac{1}{4}$ .

$$\text{D'après ce qui précède, } \frac{\varphi(x) - \frac{1}{2}}{x} = \int_0^1 \frac{t^x}{(1+t^x)^2} dt. \text{ Donc, } \left| \frac{\varphi(x) - \frac{1}{2}}{x} - \frac{1}{4} \right| = \left| \int_0^1 \frac{t^x}{(1+t^x)^2} dt - \int_0^1 \frac{1}{4} dt \right| = \left| \int_0^1 \frac{t^x}{(1+t^x)^2} - \frac{1}{4} dt \right| = \left| \int_0^1 \frac{4t^x - (1+t^x)^2}{4(1+t^x)^2} dt \right|$$

$$\left| \int_0^1 \frac{(1-t^x)^2}{4(1+t^x)^2} dt \right| \leq \int_0^1 \frac{(1-t^x)^2}{4(1+t^x)^2} dt \leq \int_0^1 (1-t^x)^2 dt = \int_0^1 1 - 2t^x + t^{2x} dt = 1 - \frac{2}{x+1} + \frac{1}{2x+1}$$

Comme  $\lim_{x \rightarrow 0} 1 - \frac{2}{x+1} + \frac{1}{2x+1} = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{\varphi(x) - \frac{1}{2}}{x} - \frac{1}{4} \right| = 0$ , ce qui signifie que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x) - \frac{1}{2}}{x} = \frac{1}{4}$ . Ainsi,  $\varphi$  est dérivable en 0 et  $\varphi'(0) = \frac{1}{4}$ .

**Exercice 3 Des généralités sur les fonctions de classe  $C^2$  sur un segment.**

Soit  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$  et  $f$  une fonction de classe  $C^2$  sur  $[a, b]$ .

**A. 0.** Justifier que  $M = \max_{[a,b]} |f''|$  existe et est finie.

Comme  $f''$  est continue sur  $[a, b]$ ,  $|f''|$  est continue sur le segment  $[a, b]$  et par conséquent,  $|f''|$  admet un maximum (et un minimum) sur ce segment. Ainsi, **M existe bien.**

## B. METHODE DES TRAPEZES D'APPROXIMATION DE $\int_a^b f(x)dx$

1. Soit  $u$  et  $v$  deux réels de  $[a, b]$  tels que  $u < v$ .

Donner l'expression de la fonction  $g: [u, v] \rightarrow \mathbb{R}$  dont la courbe est le segment d'extrémités  $A(u, f(u))$  et  $A'(v, f(v))$ .

$g$  est affine i.e. de la forme  $g(x) = \alpha x + \beta$  (puisque sa courbe est une droite) et la pente est  $\alpha = \frac{f(u)-f(v)}{u-v}$ ;

de plus,  $g(u) = f(u)$  (et  $g(v) = f(v)$ ) donc  $f(u) = g(u) = \alpha u + \beta = \frac{f(u)-f(v)}{u-v}u + \beta$ . Donc,  $\beta = f(u) - \frac{f(u)-f(v)}{u-v}u = \frac{uf(v)-vf(u)}{u-v}$ .

Ainsi,  $\forall x \in [u, v], g(x) = \frac{f(u)-f(v)}{u-v}x + \frac{uf(v)-vf(u)}{u-v}$ .

2. Soit  $x \in [u, v]$  fixé. On pose  $\forall t \in [u, v], h(t) = f(t) - g(t) + K(t-u)(t-v)$  où  $K$  est une constante.

2.1 Choisir  $K$  de sorte qu'il existe  $\alpha \in ]u, x[$  et  $\beta \in ]x, v[$  tel que :  $h'(\alpha) = 0 = h'(\beta)$ .

Choisissons  $K$  de sorte que  $h(x) = 0$  i.e.  $K$  tel que :  $f(x) - g(x) + K(x-u)(x-v) = 0$ .

Prenons donc  $K = -\frac{f(x)-g(x)}{(x-u)(x-v)}$ . Et désormais  $h(x) = 0$ . Alors  $h(u) = h(v) = h(x) = 0$ . De plus,  $f$  et  $g$  sont de classe  $C^2$  sur  $[u, v]$  donc  $h$  l'est aussi. En particulier,  $h$  est continue sur  $[u, x]$  et sur  $[x, v]$  et dérivable sur  $]u, x[$  et sur  $]x, v[$ . Donc Rolle assure qu'il existe  $\alpha \in ]u, x[$  et  $\beta \in ]x, v[$  tel que :  $h'(\alpha) = 0 = h'(\beta)$ .

2.2 En déduire qu'il existe  $c_x \in ]u, v[$  tel que :  $f(x) - g(x) = \frac{(x-u)(x-v)f''(c_x)}{2}$ .

On peut alors à nouveau appliquer Rolle à  $h'$  puisque  $h'$  est dérivable donc continue sur  $[u, v]$ , donc continue sur  $[\alpha, \beta]$  et dérivable sur  $]\alpha, \beta[$  et  $h'(\alpha) = 0 = h'(\beta)$ . Ainsi, il existe  $c_x \in ]u, v[$  tel que  $h''(c_x) = 0$ . Or,  $h''(t) = f''(t) - g''(t) + 2K \stackrel{\text{car } g \text{ affine}}{=} f''(t) + 2K$ . Donc,  $f''(c_x) + 2K = 0$ . Donc,  $\frac{f(x)-g(x)}{(x-u)(x-v)} = -\frac{f''(c_x)}{2}$ . Ainsi,  $f(x) - g(x) = \frac{(x-u)(x-v)f''(c_x)}{2}$ .

2.3 Montrer que  $\forall x \in [u, v], |f(x) - g(x)| \leq M \frac{(x-u)(v-x)}{2}$ .

$\forall x \in [u, v]$ , il existe  $c_x \in ]u, v[$  tel que  $|f(x) - g(x)| = \left| \frac{(x-u)(x-v)f''(c_x)}{2} \right| = \frac{1}{2} |(x-u)(x-v)| |f''(c_x)|$ .

Or,  $|f''(c_x)| \leq \frac{1}{2}$  donc  $\frac{1}{2} |(x-u)(x-v)| |f''(c_x)| \leq \frac{1}{2} |(x-u)(x-v)| M = M \frac{(x-u)(v-x)}{2}$ . Ainsi,  $\forall x \in [u, v], |f(x) - g(x)| \leq M \frac{(x-u)(v-x)}{2}$ .

3. Soit  $n$  un entier naturel non nul.

On pose  $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, u_k = a + \frac{k(b-a)}{n}$  et  $A_k(u_k, f(u_k))$  point de  $Cf$ . On définit la fonction  $g_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dont la courbe est la ligne brisée qui relie les points  $A_0, A_1, \dots, A_n$ .

3.1 Donner la valeur de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(u_k)$ .

Comme  $f$  est continue sur  $[a, b]$ , le théorème des sommes de Riemann assure que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(u_k) = \int_a^b f(t)dt$ .

Donc,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(u_k) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt = \text{la moyenne de } f \text{ sur } [a, b]$ .

3.2 Montrer que  $\left| \int_a^b [f(x) - g_n(x)]dx \right| \leq M \sum_{k=0}^{n-1} \int_{u_k}^{u_{k+1}} \frac{(x-u_k)(u_{k+1}-x)}{2} dx$ .

D'après 2.3,  $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \forall x \in [u_k, u_{k+1}], |f(x) - g_n(x)| \leq M \frac{(x-u_k)(u_{k+1}-x)}{2}$ .

Donc  $\left| \int_{u_k}^{u_{k+1}} [f(x) - g_n(x)]dx \right| \stackrel{\text{inégalité triangulaire intégral}}{\leq} \int_{u_k}^{u_{k+1}} |f(x) - g_n(x)|dx \stackrel{\text{par croissance de l'opérateur intégral}}{\leq} \int_{u_k}^{u_{k+1}} M \frac{(x-u_k)(u_{k+1}-x)}{2} dx = M \int_{u_k}^{u_{k+1}} \frac{(x-u_k)(u_{k+1}-x)}{2} dx$ . De plus, d'après Chasles,  $\int_a^b [f(x) - g_n(x)]dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{u_k}^{u_{k+1}} [f(x) - g_n(x)]dx$ . Donc,

$$\left| \int_a^b [f(x) - g_n(x)]dx \right| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{u_k}^{u_{k+1}} [f(x) - g_n(x)]dx \right| \stackrel{\text{inégalité triangulaire classique}}{\leq} \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{u_k}^{u_{k+1}} [f(x) - g_n(x)]dx \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} M \int_{u_k}^{u_{k+1}} \frac{(x-u_k)(u_{k+1}-x)}{2} dx$$

$$= M \sum_{k=0}^{n-1} \int_{u_k}^{u_{k+1}} \frac{(x-u_k)(u_{k+1}-x)}{2} dx$$

3.3 En déduire que  $\left| \int_a^b [f(x) - g_n(x)]dx \right| \leq \frac{M(b-a)^3}{12n^2}$ .

$$\int_{u_k}^{u_{k+1}} \frac{(x-u_k)(u_{k+1}-x)}{2} dx \stackrel{\text{cV}}{=} \frac{1}{2} \int_0^{\frac{b-a}{n}} t \left( \left( \frac{b-a}{n} \right) - t \right) dt = \frac{1}{2} \left[ \frac{b-a}{n} \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} \right]_0^{\frac{b-a}{n}} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) \left( \frac{b-a}{n} \right)^3$$

$$\stackrel{\substack{t=x-u_k \\ dt=dx \\ x=u_k \Leftrightarrow t=0 \\ x=u_{k+1} \Leftrightarrow t=u_{k+1}-u_k=\frac{b-a}{n}}}{=} \frac{M(b-a)^3}{12n^3}$$

Alors,  $\sum_{k=0}^{n-1} \int_{u_k}^{u_{k+1}} \frac{(x-u_k)(u_{k+1}-x)}{2} dx = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{M(b-a)^3}{12n^3} = \frac{M(b-a)^3}{12n^3} \times n = \frac{M(b-a)^3}{12n^2}$ .

Ainsi, en utilisant l'inégalité 3.2, je peux conclure que  $\left| \int_a^b [f(x) - g_n(x)]dx \right| \leq \frac{M(b-a)^3}{12n^2}$ .

3.4 Expliquer pourquoi  $\int_a^b f(x)dx$  est la limite quand  $n \rightarrow +\infty$  d'une somme d'aires de trapèzes.

$\int_a^b g_n(x)dx$  correspond à la somme des aires des trapèzes hachurés sur le dessin. Or on a montré que :

$\left| \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g_n(x)dx \right| \leq \frac{M(b-a)^3}{12n^2}$ . Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{M(b-a)^3}{12n^2} = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b g_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$ .  $\int_a^b f(x)dx$  est la limite quand  $n \rightarrow +\infty$  d'une somme d'aires de trapèzes.

**C. DEUX INÉGALITÉS (indépendantes) DANS LE CAS où  $f'(a) = 0 = f'(b)$ .**

On suppose désormais que  $f'(a) = 0 = f'(b)$ .

4. Montrer que  $\left(\int_a^b f'(t)^2 dt\right)^2 \leq \left(\int_a^b f(t)^2 dt\right) \left(\int_a^b f''(t)^2 dt\right)$  (indication : faire une IPPet appliquer un bon théorème).

$$\int_a^b f'(t)^2 dt = [f'(t)f(t)]_a^b - \int_a^b f(t)f''(t) dt \stackrel{\substack{\text{c.à.r} \\ f'(a)=0=f'(b)}}{=} - \int_a^b f(t)f''(t) dt.$$

$$\text{Donc, } \left(\int_a^b f'(t)^2 dt\right)^2 = \left(\int_a^b f(t)f''(t) dt\right)^2 \stackrel{\substack{\text{en appliquant} \\ \text{Cauchy-Schwarz}}}{\leq} \left(\int_a^b f(t)^2 dt\right) \left(\int_a^b f''(t)^2 dt\right).$$

5. Démontrer en appliquant deux fois la formule de Taylor-Lagrange que :  $|f(b) - f(a)| \leq M \frac{(b-a)^2}{4}$ .

Appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange à  $f$  entre  $b$  et  $\frac{a+b}{2}$  :  $f$  est de classe  $C^2$  sur  $[\frac{a+b}{2}, b]$  et  $\forall t \in [\frac{a+b}{2}, b]$ ,  $|f''(t)| \leq M$ , donc

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f(b) - f'(b)\left(\frac{a+b}{2} - b\right)\right| \leq \frac{M\left|\frac{a+b}{2} - b\right|^2}{2} \text{ ce qui donne : } \left|f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f(b)\right| \leq \frac{M|b-a|^2}{8} = \frac{M(b-a)^2}{8} \text{ puisque } f'(b) = 0.$$

De même entre  $a$  et  $\frac{a+b}{2}$  :  $\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f(a) - f'(a)\left(\frac{a+b}{2} - a\right)\right| \leq \frac{M\left|\frac{a+b}{2} - a\right|^2}{2}$  ce qui donne :  $\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f(a)\right| \leq \frac{M(b-a)^2}{8}$  puisque  $f'(a) = 0$ .

$$\text{Alors, } |f(b) - f(a)| = \left|f(b) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f(a)\right| \stackrel{\substack{\text{inégalité} \\ \text{triangulaire}}}{\leq} \left|f(b) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| + \left|f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f(a)\right| \leq 2M \frac{(b-a)^2}{8} = M \frac{(b-a)^2}{4}.$$