Ds 5

CALCULATRICE et AUTRE OUTILS NUMERIQUE NON AUTORISES. DUREE 4 HEURES.
INTERDICTION DE SORTIR DE LA SALLE LA PREMIERE HEURE
Le sujet comporte 2 pages (1 feuille recto-verso). Les exercices sont indépendants.
QUELQUES CONSIGNES :
- Bien lire tout le sujet avant de commencer.
- Traiter les exercices dans l'ordre que vous souhaitez.
- Justifier toutes vos réponses. Bien relire chaque raisonnement et s'assurer que :

•Vous n'avez pas d'emblée affirmé que la propriété à démontrer est vraie (sans justifier). Posez - vous les bonnes questions : je sais que ? ou je cherche quand ou qui ? ou je veux montrer que ?

•Le raisonnement est clairement exposé : avec une syntaxe correcte en maths et en français. Relisez-vous pour vous assurer que vous avez bien écrit ce que vous vouliez dire (en maths comme en français).

•Les liens logiques (donc, si et seulement si, car, alors, si, par conséquent, je sais que, en conclusion, …, ⟺,⟹) sont utilisés et utilisés à bon escient.

•La phrase réponse, attendue et soulignée (ou encadrée ou surlignée) répond clairement à la question posée.

Si vous avez un doute sur l'énoncé (erreur d'énoncé ??), n'hésitez pas à demander au professeur-surveillant.

Exercice 1

Soit $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)} dt$.

1. Montrer que f est définie sur $D =]0,1[\cup]1,+\infty[$.
2. Montrer que f est dérivable sur D et déterminer une expression de f' sur D.
3. En déduire les variations de f sur D.
4. Déterminer la limite de f en 0. En déduire que f est prolongeable par continuité en 0. On note encore f son prolongement (autrement dit, $f = \tilde{f}$).
5. Montrer que f est de classe C^1sur $[0,1[\cup]1,+\infty[$.
6. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
7. Montrer que $\forall x \in]0,1[, \int_x^{x^2} \frac{x^2}{t\ln(t)} dt \leq f(x) \leq \int_x^{x^2} \frac{x}{t\ln(t)} dt$.
8. En déduire que f est prolongeable par continuité en 1. On note encore f son prolongement.
9. Montrer que f est de classe C^1sur $\mathbb{R}^+$.
10. Montrer que f est de classe C^2sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $f''(1) = \frac{1}{2}$. On donnera une expression de f''.
11. Etudier la convexité de f sur $\mathbb{R}^+$.
12. Représenter Cf.

Exercice 2

1. Préliminaire : Soit un réel x positif. Montrer que $\int_0^1 t^x dt$ existe et $\int_0^1 t^x dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 t^x dt = \frac{1}{x+1}$.

De la même façon, on peut démontrer (non demandé) que si u et v sont de classe C^1 sur $]a,b]$ et sont prolongeables par continuité en a en des fonctions de classe C^1 sur $[a,b]$ alors la formule d'intégration par partie $\int_a^b u'(t)v(t)dt = \cdots$ ……….. a bien un sens et signifie :

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt = \int_a^b \tilde{u}'(t)\tilde{v}(t)dt = [\tilde{u}(t)\tilde{v}(t)]_a^b - \int_a^b \tilde{u}(t)\tilde{v}'(t)dt = u(b)v(b) - \lim_{t \to a} u(t)v(t) - \int_a^b \tilde{u}(t)\tilde{v}'(t)dt$$

On pose :

pour tout réel x positif, $\varphi(x) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^x} dt$.

pour tout réel x positif et tout réel t de $]0,1]$, $f_x(t) \frac{1}{1+t^x}$.

2. Soit un réel x positif. Calculer $L = \lim_{t \to 0} f_x(t)$. Désormais, $f_x$est définie en 0 et $f_x(0) = L$.
3. Justifier que pour tout réel x positif, $\varphi(x)$ existe. Calculer $\varphi(0), \varphi(1)$ et $\varphi(2)$.
4. Montrer que φ est croissante sur $\mathbb{R}^+$.
5. Montrer que pour tous réels x et y tels que $0 \leq x \leq y, |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \int_0^1 (t^x - t^y)dt \leq y - x$.
6. En déduire que φ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
7. Montrer que pour tout réel x positif, $1 - \varphi(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t^x} dt$.
8. En déduire que $\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = 1$.
9. Montrer que : pour tout réel x positif, $\varphi(x) = \frac{1}{2} + x \int_0^1 \frac{t^x}{(1+t^x)^2} dt$.
10. En déduire que φ est dérivable en 0 et déterminer $\varphi'(0)$.

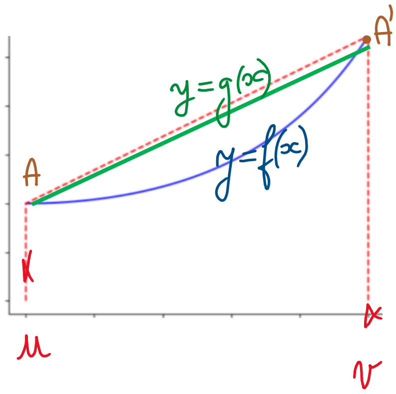
Exercice 3

Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction de classe C^2 sur $[a, b]$.

A. **0**. Justifier que $M = max_{[a,b]}|f''|$ existe et est finie.

B. **METHODE DES TRAPEZES D'APPROXIMATION DE $\int_a^b f(x)dx$**

1. Soit u et v deux réels de $[a, b]$ tels que $u < v$.
Donner l'expression de la fonction $g: [u, v] \to \mathbb{R}$ dont la courbe est le segment d'extrémités $A(u, f(u))et$ $A'(v, f(v))$.
2. Soit $x \in [u, v]$. On pose $h(t) = f(t) - g(t) + K(t - u)(t - v)$ où K est une constante.
   2.1 Choisir K de sorte qu'il existe $\alpha \in]u, x[$ et $\beta \in]x, v[$ tel que : $h'(\alpha) = 0 = h'(\beta)$.
   2.2 En déduire qu'il existe $c_x \in]u, v[$ tel que : $f(x) - g(x) = \frac{(x-u)(x-v)f''(c_x)}{2}$.
   2.3 Montrer que $\forall x \in [u, v], |f(x) - g(x)| \leq M \frac{(x-u)(v-x)}{2}$.



3. Soit n un entier naturel non nul.

On pose $\forall k \in [\![0, n]\!], u_k = a + \frac{k(b-a)}{n}$ et $A_k(u_k, f(u_k))$ point de Cf. On définit la fonction $g_n: [a, b] \to \mathbb{R}$ dont la courbe est la ligne brisée qui relie les points $A_0, A_1, \dots, A_n$.
Faire un dessin !

   3.1 Donner la valeur de $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(u_k)$.
   3.2 Montrer que $\left| \int_a^b [f(x) - g_n(x)]dx \right| \leq M \sum_{k=0}^{n-1} \int_{u_k}^{u_{k+1}} \frac{(x-u_k)(u_{k+1}-x)}{2} dx$.
   3.3 En déduire que $\left| \int_a^b [f(x) - g_n(x)]dx \right| \leq \frac{M(b-a)^3}{12n^2}$.
   3.4 Expliquer pourquoi $\int_a^b f(x)dx$ est la limite quand $n \to +\infty$ d'une somme d'aires de trapèzes.

C. **DEUX INEGALITES (indépendantes) DANS LE CAS où $f'(a) = 0 = f'(b)$.**

On suppose désormais que $f'(a) = 0 = f'(b)$.

4. Montrer que $\left(\int_a^b f'(t)^2 dt \right)^2 \leq \left(\int_a^b f(t)^2 dt \right) \left(\int_a^b f''(t)^2 dt \right)$ (indication : faire une IPP puis utiliser un bon théorème).
5. Démontrer en appliquant deux fois la formule de Taylor-Lagrange que : $|f(b) - f(a)| \leq M \frac{(b-a)^2}{4}$. (indication : utiliser le point $\frac{a+b}{2}$, milieu de $[a, b]$).

Fin.