Préparation du test de cours du lundi 30 mars

Définition d'une Matrice inversible et de son inverse . Premiers exemples : I_n et matrices d'opérations élémentaires.

Règles de calcul dans $GL_n(K)$.

Caractérisation de l'Inversibilité et la non-Inversibilité.

SAVOIR-FAIRE : prouver l'inversibilité de A et le cas échéant l'inverse par deux méthodes :

1. **« Découverte » de B telle que $AB = I$**
2. **Résolution du système linéaire $AX = Y$ d'inconnue X.**

Ex19 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^3. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.
2. Démontrer que A est inversible et déterminer son inverse par résolution d'un système linéaire.

1.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A^2$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I = A^3$$

$A^3 = I$. Autrement dit , $\underbrace{A^2}_{B} A = I$. J'en déduis, grâce à la caractérisation de l'inversibilité $(a) \Leftrightarrow (b)$, que A est inversible et $A^{-1} = B = A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Soit $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$. Résolvons le système $AX = Y$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$.

Tout d'abord, effectuons le produit AX :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = X$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} y \\ -x-y-z \\ z \end{pmatrix} = AX$$

Donc, $AX = Y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y \\ -x-y-z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y = a \\ -x-y-z = b \\ z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -a-b-c \\ y = a \\ z = c \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} y \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a-b-c \\ a \\ c \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} y \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Y.$$

J'en déduis que, pour chaque valeur de Y, le système $AX = Y$, $d'inconnue\ X$, admet une unique solution qui est $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Y$. Alors d'après la caractérisation de l'inversibilité $(a) \Leftrightarrow (i)$, j'en conclus que A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.