Préparation du test de cours du mardi 31 mars

1) **Caractérisation de l'Inversibilité d'une matrice carrée d'ordre 2 et le cas échéant, l'inverse.**
2) **Caractérisation de l'Inversibilité d'une matrice diagonale et le cas échéant, l'inverse.**
3) **Caractérisation de l'Inversibilité d'une matrice triangulaire**

SAVOIR-FAIRE :

Ex21 Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 9 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} -9 & -2 & 3 \\ 9 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

1. Montrons que $P = \begin{pmatrix} -9 & -2 & 3 \\ 9 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible.

2. Montrer que : $AP = PD$.

3. En déduire A^p puis A^{-p} où $p \in \mathbb{N}$.

Ex20 corrigé Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $(A+I)^3$. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

2. Que peut-on dire de $A+I$? Retrouver alors par une autre formule l'expression de A^{-1} ?

1.

$$\begin{array}{ccc} & \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{A+I} & \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{(A+I)^2} & \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{(A+I)^3} \end{array}.$$

$(A+I)^3 = O_3$. Comme A et I commutent, $(A+I)^3 \overset{FBN}{=} A^3 + 3A^2 + 3A + I$. Ainsi, $A^3 + 3A^2 + 3A + I = O_3$.
Donc $-A^3 - 3A^2 - 3A = I$ puis $A[-A^2 - 3A - 3I] = I$. J'en déduis, d'après une caractérisation de l'inversibilité, que A est inversible et son inverse est $A^{-1} = -A^2 - 3A - 3I$.

2. $N = A + I$ est nilpotente d'indice 3. Or, $A = N - I$. Et d'après la formule de factorisation ,
$I = I^3 - N^3 \underbrace{=}_{car\ I\ et\ N\ commutent} (I-N)(I+N+N^2)$. Donc, $I = A(-I - N - N^2)$.
Ainsi, A est inversible et $A^{-1} = -I - N - N^2 \underbrace{=}_{\substack{FBN \\ pour\ développer \\ N^2}} -I - A - I - A^2 - 2A - I = -A^2 - 3A - 3I$. .