Préparation du test de cours du mercredi 1 avril

1) « Définition » du déterminant d'ordre n..
2) Calcul d'un déterminant d'ordre 3 par développement par rapport à une ligne ou une colonne.

Ex 34 Matrices à diagonales dominantes

Soit $A = \left(a_{ij}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ une matrice carrée d'ordre n telle que :$\forall i \in [\![1,n]\!], |a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$.

Nous allons prouver par l'absurde que A est inversible . Pour cela, imaginons un instant que A n'est pas inversible.

1. Justifier qu'il existe $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ tel que $X \neq 0 \; et \;\; AX = 0$.
2. Justifier que $max(|x_1|,|x_2|..,|x_n|) > 0 \; et \;\; \exists i_0 \in [\![1,n]\!]/ \;|x_{i_0}| = max(|x_1|,|x_2|..,|x_n|)$
3. Montrer que $\forall i \in [\![1,n]\!], \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0$.
4. En déduire que $|a_{i_0 i_0}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i_0}}^{n} |a_{i_0 j}|$.
5. Conclure