Programme de colle 23

Révision : résolution des équations différentielles d'ordre 1 (**)

+Chapitre 16 Matrices

I Opérations sur les matrices.

1. Généralités

- définition d'une matrice, exemple (matrice nulle, identité, matrice colonne ou ligne), notations.
- égalité de deux matrices.
- ensembles $M_{n,p}(K)$ et $M_n(K)$.

Pour ne pas s'encombrer de lettres, on notera simplement $(A+BC)_{ij}$ le coefficient ligne i et colonne j de la matrice $A+BC$.

2. Opérations

- **Somme, multiplication externe, combinaison linéaire**

$\forall A=(a_{ij})\in M_{n,p}(K), \forall B=(b_{ij})\in M_{n,p}(K) et\ \forall(\mu,\beta)\in K^2, \forall(i,j)\in [\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$,

$(A+B)_{ij}=a_{ij}+a_{ij}$ et $(\mu A)_{ij}=\mu a_{ij}$ et $(\mu A+\beta B)_{ij}=\mu a_{ij}+\beta b_{ij}$

- **Produit matriciel.** $\forall A=(a_{ij})\in M_{n,p}(K), \forall B=(b_{ij})\in M_{p,q}(K), \forall(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,q]\!]$, $(AB)_{ij}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}$

Si $B=\begin{pmatrix} b_1\\ \vdots \\ b_p\end{pmatrix}\in M_{p,1}(K)$ et $A\in M_{n,p}(K)$ $alors\ AB=\sum_{k=1}^{p}b_kC_k$ $où\ C_1,..,C_p\ sont\ les\ colonnes\ de\ A.$

Si $B=(b_1\cdots b_n)\in M_{1,n}(K)$ et $A\in M_{n,p}(K)$ $alors\ BA=\sum_{k=1}^{n}b_kL_k$ $où\ L_1,..,L_n\ sont\ les\ lignes\ de\ A.$

- **Règles de calcul**

Associativité de l'addition et le produit matriciels, commutativité de l'addition, distributivité du produit matriciel et de la multiplication externe sur l'addition, éléments neutres de l'addition (O_{np}) et de la multiplication (I_n), produit mixte.

- **Mises en garde.** Il arrive très souvent que :
- $AB\neq BA$ (le produit matriciel n'est pas commutatif).
- $AB=O$ $\cancel{\Rightarrow}$ $B=O\ ou\ A=O$ (le produit matriciel n'est pas intègre).
- $AB=AC$ $\cancel{\Rightarrow}$ $A=0\ ou\ B=C$

3. Transposition

$\forall A=(a_{ij})\in M_{n,p}(K), A^T\in M_{n,p}(K)\ telle\ que\ \forall(i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,n]\!], (A^T)_{ij}=a_{ji}.$

Règles de calcul : transposée de la transposée, transposée d'une combinaison linéaire, d'un produit.

$\forall A\in M_{n,p}(K), \forall B\in M_{n,p}(K), \forall(\alpha,\beta)\in K^2,\ (A^T)^T=A\ et\ (\alpha A+\beta B)^T=\alpha A^T+\beta B^T.$

$\forall A\in M_{n,p}(K), \forall B\in M_{p,q}(K), (AB)^T=B^TA^T$

4. Matrices élémentaires

$\forall(r,s)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,n]\!]$, on définit $E_{rs}\in M_{n,p}(K)$ par : le seul coefficient non nul de E_{rs} est le coefficient ligne r et colonne s et ce coefficient vaut 1.

Dans $M_n(K)$: $\forall(r,s,u,v)\in[\![1,n]\!]^4, E_{rs}E_{uv}=\delta_{su}E_{rv}$.

Toute matrice $A=(a_{ij})\in M_{n,p}(K)$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des matrices élémentaires de $M_{n,p}(K)$ et cette unique écriture est $A=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}a_{ij}E_{ij}$.

II Algorithme de Gauss et rang.

1. Opérations élémentaires :

Les opérations élémentaires : échange de deux lignes $L_i\leftrightarrow L_j$, multiplier une ligne par un scalaire non nul $L_i\leftarrow\lambda L_i$ et ajouter à une ligne une autre ligne multipliée par un scalaire $L_i\leftarrow L_i+\beta L_j$. Lorsque A' est obtenue en faisant subir à une matrice $A\in M_{n,p}(K)$ une suite finie d'opérations élémentaires, on dit que A' et A sont **équivalentes par lignes** et on note : $A\sim_L A'$.

Matrice de transposition : $\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, on définit $T_{ij}\in M_n(K)$ par : T_{ij} est la matrice obtenue en faisant subir $L_i\leftrightarrow L_j$ à I_n.

Matrice de dilatation : $\forall i\in[\![1,n]\!], \forall\lambda\in K^*$, on définit $D_i(\lambda)\in M_n(K)$ par : $D_i(\lambda)$ est la matrice obtenue en faisant subir $L_i\leftarrow\lambda L_i$ à I_n.

Matrice de transvection : $\forall i\in[\![1,n]\!], \forall\beta\in K$, on définit $H_{ij}(\beta)\in M_n(K)$ par : $H_{ij}(\beta)$ est la matrice obtenue en faisant subir $L_i\leftarrow L_i+\beta L_j$ à I_n.

La matrice A' obtenue en effectuant sur A l'opération $L_i\leftrightarrow L_j$ vérifie $A'=T_{ij}\ A.$

La matrice A' obtenue en effectuant sur A l'opération $L_i\leftarrow\lambda L_i$ vérifie $A'=D_i(\lambda)\ A.$

La matrice A' obtenue en effectuant sur A l'opération $L_i\leftarrow L_i+\beta L_j$ vérifie $A'=H_{ij}(\beta)\ A.$

2. Echelonnement

Matrice échelonnée : une matrice $A \in M_{n,p}(K)$ est échelonnée lorsqu'elle est nulle ou lorsque chaque ligne non nulle débute par davantage de de zéros que la précédente. Les pivots d'une telle matrice sont les premiers coefficients non nuls des lignes non nulles.

Matrice échelonnée réduite: une matrice $A \in M_{n,p}(K)$ est échelonnée réduite par ligne lorsqu'elle est échelonnée, que ses pivots valent 1 et les autres coefficients se trouvant sur la colonne d'un pivot sont nuls. Le **rang** d'une telle matrice échelonnée réduite est le nombre de ses pivots.

Théorème de Gauss-Jordan. Toute matrice $A \in M_{n,p}(K)$ est équivalente par ligne à une matrice E échelonnée et à une unique matrice R échelonnée réduite.

Le rang de A est par définition le rang de R.

Propriétés :

- Le rang de toute matrice échelonnée est égal à son nombre de pivots.
- Le rang d'une matrice A est le rang de toute matrice équivalente par ligne à A et en particulier de toute matrice échelonnée équivalente à A.
- Si $A \in M_n(K)$ alors $[rg(A) = n \Leftrightarrow A \sim_L I_n]$.

3. Système linéaire

(S): $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$ d'inconnue $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in K^p$. $\rightsquigarrow$ (SH): $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = 0 \end{cases}$ le système homogène associé à (S).

(S) est échelonné lorsque en passant d'une ligne de (S) à la suivante, au moins une inconnue « disparait » (cette inconnue a en fait son coefficient nul).

(S) est de Cramer lorsque $n = p$ et (S) admet une unique solution.

(S) est compatible lorsque (S) admet au moins une solution. (S) est incompatible lorsque (S) n'admet aucune solution.

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$ la matrice des coefficients de (S). Et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ la matrice du second membre de (S).

Alors, $(S) \Leftrightarrow AX = B$. Et échelonner (S) revient à échelonner A et à faire en parallèle les opérations sur B.

Théorème de Gauss-Jordan. Tout système linéaire est équivalent à un système linéaire échelonné.

Propriétés :

- Si X_0est une solution particulière de (S) alors les solutions de (S) sont toutes les matrices de la forme $X_0 + Y$ où Y solution de (SH).
- Si (S) est carrée d' ordre n alors $[rg(S) = n \Leftrightarrow (S)\ est\ de\ Cramer\ ]$.

III Matrices carrées

1. Définition et opérations.

2. Trace : définition et propriétés.

Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$. $tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$

Soit $(A,B) \in M_n(K)^2 et\ (\alpha,\beta) \in K^2$. $tr(\alpha A + \beta B) = \alpha tr(A) + \beta tr(B)$ et $tr(AB) = tr(BA)$

Soit $A = (a_{ij}) \in M_{n,p}(K)$. $tr(A^T A) = tr(AA^T) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_{ij}^2$. A SAVOIR DEMONTRER !

3. Matrices carrées particulières :

<u>Matrice nulle, identité</u>

<u>Matrices diagonales ou triangulaires</u> Définition. Le produit et les combinaisons linéaires de matrices diagonales (resp. triangulaires supérieures, resp. inférieures) sont diagonales (resp. triangulaires supérieures, respectivement inférieures). Diagonale d'un produit de matrices diagonales (resp. triangulaires supérieures, respectivement inférieures).

Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$. A est diagonale lorsque $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, (i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0)$. On note $diag(\delta_1, \delta_2, .., \delta_n) = \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \delta_n \end{pmatrix}$.

Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$. A est triangulaire supérieure lorsque $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$.

Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$. A est triangulaire inférieure lorsque $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$.

Soit $(A,B) \in M_n(K)^2 et\ (\alpha,\beta) \in K^2$.
Si $A\ et\ B$ sont diagonales alors $\alpha A + \beta B$ et AB sont diagonales.
Si $A\ et\ B$ sont triangulaires supérieures (resp. inférieures) alors $\alpha A + \beta B$ et AB sont triangulaires supérieures (resp. inférieures).

<u>Matrices symétriques ou antisymétriques.</u> Définition. Les combinaisons linéaires de matrices symétriques (resp. antisymétriques), sont symétriques (resp. antisymétriques). Toute matrice s'écrit de manière unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Soit $A \in M_n(K)$. A est symétrique lorsque $A^T = A$. A est antisymétrique lorsque $A^T = -A$.

$A = (a_{ij})\ symétrique \Leftrightarrow \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, a_{ij} = a_{ji}$.
$A = (a_{ij})\ antisymétrique \Leftrightarrow \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, a_{ij} = -a_{ji}$. $A\ antisymétrique \Rightarrow \forall i \in [\![1,n]\!], a_{ii} = 0$.
Si $A\ et\ B$ sont symétriques (resp. antisymétriques) alors $\alpha A + \beta B$ et AB sont symétriques (resp. antisymétriques).

Toute matrice M de $M_n\ (K)$ s'écrit de manière unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une antisymétrique et l'écriture est $M = \frac{M+M^T}{2} + \frac{M-M^T}{2}$.

4. Puissances d'une matrice carrée

Définition :

Soit $A \in M_n\ (K)$. $A^0 = I$ et $\forall m \in \mathbb{N}^*, A^m = A^{m-1}A$.
Si $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + .. + a_pX^p \in K[X]$ alors $P(A) = a_0I + a_1A + a_2A^2 + .. + a_pA^p$. P est annulateur de A lorsque $P(A) = 0$.
Si $P(X) = Q(X)S(X) + R(X)$ alors $P(A) = Q(A)S(A) + R(A)$.

Règles de calcul : formule du binôme de Newton, formule de factorisation.

Si A et $B \in M_n\ (K)$ telles que $AB = BA$ (A et B commutent) alors $(A+B)^N = \sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}A^kB^{N-k}$ et $A^{N+1} - B^{N+1} = (A-B)(\sum_{k=0}^{N}A^kB^{N-k})$.

Si $(A, B) \in M_n\ (K)^2$ et $(\alpha, \beta) \in K^2$ telles que A et B commutent alors αA et βB commutent.

Exemples : puissance de λA , de $I(= I_n)$, de $J \in M_n\ (K)$ dont tous les coefficients valent 1, d'une matrice diagonale, du produit de deux matrices qui commutent.

Si $(A, B) \in M_n\ (K)^2$ et $\lambda \in K$ et $m \in \mathbb{N}$, alors $(\lambda A)^m = \lambda^m A^m$ et si $AB = BA$ alors $(AB)^m = A^mB^m$.
$I^m = I$ et $J^m = \begin{cases} n^{m-1}J \text{ si } m \geq 1 \\ I \text{ si } m = 0 \end{cases}$.
$(diag(\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n))^m = diag({\alpha_1}^m, {\alpha_2}^m, .., {\alpha_n}^m)$

Matrices nilpotentes : définition, exemple : cas des matrices triangulaires avec la diagonale nulle

Soit $N \in M_n\ (K)$. N est nilpotente lorsqu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $N^p = O$.
Toute matrice triangulaire avec diagonale nulle est nilpotente.

Méthodes pour calculer A^m tq $m \in \mathbb{N}$.

a) Conjecture + récurrence (+ parfois suites)
b) Ecriture $A = B + C$ où B et C commutent + formule du binôme de Newton.
c) Polynôme annulateur + division euclidienne.
d) $A = P^{-1}BP$ donc $A^k = P^{-1}B^kP$

IV Matrices carrées inversibles

1. Définition

Soit $A \in M_n\ (K)$. A est inversible lorsqu'il existe $B \in M_n\ (K)$ tel que $AB = BA = I_n$. Une telle matrice B lorsqu'elle existe est unique est appelée l'inverse de A et est notée A^{-1} . Ainsi, A^{-1}, si elle existe, est l'unique matrice vérifiant $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

$GL_n\ (K)$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans K et inversibles.

Si $A \in GL_n\ (K)$ alors $[AB = AC \Leftrightarrow B = C]$ et $[AX = Y \Leftrightarrow X = A^{-1}Y]$.

2. Opérations

Si P et Q $\left(\in M_n\ (K)\right)$ sont inversibles, $\lambda \in K^*$ et $k \in \mathbb{N}$ alors $\lambda P, PQ, P^T, P^k$ sont inversibles et

$(PQ)^{-1} = Q^{-1}P^{-1}$, $(\lambda P)^{-1} = \left(\frac{1}{\lambda}\right)P^{-1}$, $(P^T)^{-1} = (P^{-1})^T$ et $(P^k)^{-1} = (P^{-1})^k$ mais $P + Q$ **n'est pas** toujours inversible.

Si P est inversible alors on définit $\forall k \in \mathbb{N}, P^{-k} = (P^{-1})^k = (P^k)^{-1}$.
Si P est inversible alors $(P^{-1}BP)^k = P^{-1}B^kP$ et si, de plus, B est inversible alors $(P^{-1}BP)^{-1} = P^{-1}B^{-1}P$.

3. Caractérisations

Soit $A \in M_n\ (K)$.
A est inversible **sietssi** rg(A)= n **sietssi** $A \sim_L I_n$ **sietssi** A est le produit de matrices d'opérations élémentaires.
A est inversible **sietssi** le système $AX = 0$ admet $X = 0$ comme unique solution.
A est inversible **sietssi** il existe B tel que $AB = I$
A est inversible **sietssi** il existe B tel que $BA = I$
A est inversible **sietssi** tout système linéaire $AX = Y$ associé à A est de Cramer. Le cas échéant , l'unique solution est $X = A^{-1}Y$.
A est inversible **sietssi** l'un des systèmes linéaires associés à A est de Cramer.
A est inversible **sietssi** A^T est inversible.

A **n'est pas** inversible **sietssi** $\mathrm{rg}(A) < n$
A **n'est pas** inversible **sietssi** il existe $X \in M_{n,1}(K)$ non nulle telle que $AX = 0$
A **n'est pas** inversible **sietssi** l'une des colonnes (resp. lignes) de A est combinaison linéaire des autres colonnes(resp. lignes).

4. Exemples de référence

1. I_n et toute matrice d' opération élémentaire sont inversibles et ${I_n}^{-1} = I_n, {T_{ij}}^{-1} = T_{ij}, D_i(\lambda)^{-1} = D_i\left(\frac{1}{\lambda}\right), H_{ij}(\beta)^{-1} = H_{ij}(-\beta)$
2. Toute matrice d'opération élémentaire est inversible et l'inverse est la matrice de l'opération inverse i.e.
   $\forall(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel $i \neq j, \forall\beta \in K, \forall\lambda \in K^*$, ${T_{ij}}^{-1} = T_{ij}$ et $D_i(\lambda) = D_i\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ et $H_{ij}(\beta) = H_{ij}(-\beta)$.
3. S'il existe B non nulle telle que $AB = O$ ou $BA = O$ alors A **n'est pas** inversible.
4. Si l'une des colonnes (resp. lignes) de A est combinaison linéaire des autres colonnes (resp. lignes) alors A **n'est pas** inversible. (en particulier si A contient une ligne ou une colonne nulle alors A n'est pas inversible)
5. Soit $D = diag(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$. D est inversible **sietssi** $\forall k \in [\![1,n]\!], \delta_k \neq 0$. Et le cas échéant, $D^{-1} = diag\left({\delta_1}^{-1}, {\delta_2}^{-1}, \dots, {\delta_n}^{-1}\right)$.

6. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(K)$.

A est inversible **sietssi** $\det(A) = ad - cb \neq 0$. Et le cas échéant, $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

7. Soit $T = (t_{ij}) \in M_n(K)$ telle que T triangulaire. T est inversible **sietssi** $\forall k \in [\![1,n]\!], t_{kk} \neq 0$. Et le cas échéant, T^{-1}est aussi triangulaire.

<u>A savoir démontrer :</u>

1. Si N est nilpotente telle que $N^p = O$ alors pour tout $\lambda \in K$, $I - \lambda N$ est inversible et $(I - \lambda N)^{-1} = \sum_{k=0}^{p-1} (\lambda N)^k$.
2. S' il existe $a_0, a_1, \dots, a_n \in K$ *tels que* $a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_p A^p = O$ et $a_0 \neq 0$ (autrement dit il existe un polynôme annulateur de A qui ne s'annule pas en 0) alors A est inversible et on trouve A^{-1} en isolant I d'un côté de l'égalité puis en factorisant par A de l'autre côté de l'égalité .

Méthodes pour prouver A est inversible et déterminer A^{-1}.

1. Utiliser un polynôme annulateur
2. Ecrire A comme le produit de matrices inversibles, la transposée , une puissance d'une matrice inversible
3. Résoudre le système linéaire (S) : $AX = Y$ où $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ paramètre et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ inconnue.
   - Ou bien (S) a parfois plein de solutions et parfois aucune solution selon Y. Alors A n'est pas inversible
   - Ou bien, pour tout Y, (S) est de Cramer et A^{-1}se lit sur l'unique solution $X = A^{-1}Y$.
4. Echelonner A en lignes (resp en colonnes) et faire, en parallèle, les mêmes opérations sur I
   - jusqu'à une matrice échelonnée pour connaitre $rg(A)$ et savoir si A est inversible .
   - jusqu'à l'obtention de I pour lire A^{-1} qui sera la matrice obtenue, en parallèle, équivalence par ligne (resp. colonne) à I.
5. Calculer det (A) et le cas échéant déterminer $com(A)$ et appliquer la formule $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}[com(A)]^T$.

+Chapitre 17 Déterminant d'une matrice carrée

Définition : déterminant d'ordre 1, d'ordre 2, d'ordre 3, d'ordre 4, puis d'ordre n par développement par rapport à une ligne ou une colonne.

Soit $A = (a_{ij})_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} \in M_n(K)$.

Δ_{ij} le déterminant de la matrice carrée d'ordre $n-1$ obtenue en ôtant à A sa ligne i et sa colonne j.

Alors, $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \det(A) = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik}\, \Delta_{ik}}_{\substack{\text{développement du det} \\ \text{par rapport à la ligne } i}} = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj}\, \Delta_{ki}}_{\substack{\text{développement du det} \\ \text{par rapport à la colonne } j}}$

Nous admettons que le résultat obtenu ne dépend pas de la ligne ou de la colonne choisie.

Exemple : le déterminant d'une matrice triangulaire ou diagonale est égal au produit des coefficients diagonaux.

Propriétés

det est linéaire par rapport à chacune des colonnes et alterné :

$\det(C_1, C_2, \dots C_{k-1}, \alpha X + \beta Y, C_{k+1}, \dots C_n) = \alpha \det(C_1, C_2, \dots C_{k-1}, X, C_{k+1}, \dots C_n) + \beta \det(C_1, C_2, \dots C_{k-1}, Y, C_{k+1}, \dots C_n)$

si $i \neq j$ alors $\det(C_1, C_2, \dots C_i, \dots, C_j, \dots C_n) = -\det(C_1, C_2, \dots, C_j, \dots, C_i, \dots C_n)$. (échange de colonnes)

Pour toutes matrices A et B carrées d'odre n , $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ *et* $det(A) = det(A^T)$.

Conséquences :

Lorsqu'une colonne (ou ligne) de A est combinaison linéaire des autres colonnes (resp. lignes) alors le déterminant est nul. (en particulier lorsqu'une ligne ou colonne est nulle ou lorsque deux colonnes ou deux lignes sont égales).

Ajouter à une colonne (resp. une ligne) une combinaison linéaire des autres colonnes (resp. lignes) ne change pas le déterminant.

Si tous les coefficients d'une colonne (resp. ligne) ont un facteur commun alors je peux « factoriser » le déterminant par ce facteur.

Si on échange deux colonnes (resp. lignes) d'une matrice alors le déterminant change de signe.

$\forall A \in M_n(K), \forall \lambda \in K, \det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$

Exemple à savoir démontrer : le déterminant de Vandermonde

Application à la caractérisation de l'Inversibilité d'une matrice

A est inversible *sietssi* $detA \neq 0$. Et le cas échéant, $det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$.

(**) résoudre deux ou trois équations différentielles linéaires d'ordre 1 pour se remémorer la méthode… Cela pourra faire l'objet d'un exercice de colle.

Questions de cours :

QDC 1: Démontrer que si $(A,B) \in GL_n(K)^2$ et $k \in \mathbb{N}$ alors AB, A^k, A^T *et* A^{-1} sont inversibles et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ et $(A^k)^{-1} = \cdots$ *et* $(A^T)^{-1} = \cdots$.

QDC 2: Montrer que le produit de deux matrices carrées d'ordre n triangulaires supérieures est triangulaire supérieure.

QDC 3 : Montrer que toute matrice carrée d'ordre n s'écrit de manière unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice anti-symétrique.

QDC 4 : A partir de la définition donnée dans le cours, montrer que le déterminant est linéaire par rapport à chaque colonne .