# Corrigé DL Polynômes

1. Trouver des polynômes $P_0, P_1$ et $P_2$ dans $\mathbb{R}[X]$ tels que :

   $\forall\theta \in \mathbb{R}, \tilde{P}_0(\cos(\theta)) = 1, \quad \tilde{P}_1(\cos(\theta)) = \cos(\theta) \quad et \quad \tilde{P}_2(\cos(\theta)) = \cos(2\theta)$ ;

   De manière évidente, $P_0(X) = 1$ $et$ $P_1(X) = X$ conviennent. De plu,s $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$. Donc $P_2(X) = 2X^2 - 1$ convient.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ $et$ $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminer de deux manières la partie réelle de $\left(\cos(\theta) + isin(\theta)\right)^n$.

   D'une part, $\left(\cos(\theta) + isin(\theta)\right)^n = \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + isin(n\theta)$. Donc $Re\left(\left(\cos(\theta) + isin(\theta)\right)^n\right) = \cos(n\theta)$.

   D'autre part, $\left(\cos(\theta) + isin(\theta)\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\cos(\theta))^{n-k}(isin(\theta))^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\cos(\theta))^{n-k}i^k(isin(\theta))^k$.

   Or, $i^k \in i\mathbb{R}$ si $k$ impair et Or, $i^k \in \mathbb{R}$ si $k$ pair. Donc,

   Donc $Re\left(\left(\cos(\theta) + isin(\theta)\right)^n\right) = \sum_{\substack{k=0 \\ k\ pair}}^{n}\binom{n}{k}(\cos(\theta))^{n-k}i^k\left(sin(\theta)\right)^k = \sum_{0\le 2p\le n}\binom{n}{2p}(\cos(\theta))^{n-2p}i^{2p}\left(sin(\theta)\right)^{2p}$

$$= \sum_{0\le 2p\le n}\binom{n}{2p}(\cos(\theta))^{n-2p}(i^2)^p\left(sin^2(\theta)\right)^p$$

$$= \sum_{p=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\binom{n}{2p}(\cos(\theta))^{n-2p}(-1)^p\left(1 - cos^2(\theta)\right)^p$$

$$Re\left(\left(\cos(\theta) + isin(\theta)\right)^n\right) = \sum_{p=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\binom{n}{2p}(\cos(\theta))^{n-2p}(cos^2(\theta) - 1)^p$$

   . .

3. En déduire que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $P_n$ tel que : $\forall\theta \in \mathbb{R}, \tilde{P}_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.

Posons $P_n(X) = \sum_{p=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\binom{n}{2p}\mathrm{X}^{n-2p}(X^2 - 1)^p$.

Alors $\forall\theta \in \mathbb{R}, \tilde{P}_n(\cos(\theta)) = \sum_{p=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\binom{n}{2p}(\cos(\theta))^{n-2p}(cos^2(\theta) - 1)^p = Re\left(\left(\cos(\theta) + isin(\theta)\right)^n\right) = \cos(n\theta)$. Donc le polynôme $P_n$ convient.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons qu'un tel polynôme $P_n$ est unique.

Supposons qu'il existe un « autre » polynôme $Q$ tel que $\forall\theta \in \mathbb{R}, Q(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$. Posons $T = P_n - Q$.

Alors, $\forall\theta \in \mathbb{R}, T(\cos(\theta)) = 0$. Or, $\{\cos(\theta) /\ \theta \in \mathbb{R}\} = [-1; 1]$. Donc $T$ admet tous les réels de $[-1\ ; 1]$ comme racines ; $T$ a donc une infinité de racines. Seul le polynôme nul a une infinité de racines. J'en conclus que $T = 0$ et ainsi, $Q = P_n$. Ainsi, $P_n$ est le seul polynôme vérifiant $\forall\theta \in \mathbb{R}, \tilde{P}_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.

5. Montrer que $\deg(P_n) = n$ (où $n \in \mathbb{N}$).

$P_n(X) = \sum_{p=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\underbrace{\binom{n}{2p}\mathrm{X}^{n-2p}(X^2 - 1)^p}_{A_p(X)}$.

Pour tout $p \in \left[\!\left[0, \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right]\!\right]$, $deg(A_p) = \deg\left(\binom{n}{2p}\mathrm{X}^{n-2p}\right) + \deg((X^2 - 1)^p) = n - 2p + 2p = n$. Donc $\deg(P_n) \le \max\left(deg(A_0), deg(A_1), .., deg\left(A_{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\right)\right) = n$.

De plus, aucun terme de la somme n'a un degré strictement plus grand que les autres ; ils sont de même degré $n$. Regardons si le terme de degré n de $P$ est nul : pour tout $p \in \left[\!\left[0, \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right]\!\right]$, $\binom{n}{2p}\mathrm{X}^n$est le terme de degré $n$ de $A_p$. Donc

$\sum_{p=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}\binom{n}{2p}\mathrm{X}^n = \left[\sum_{p=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}\binom{n}{2p}\right]\mathrm{X}^n$ est le terme de degré $n$ de $P_n$. Comme $\left[\sum_{p=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}\binom{n}{2p}\right]$ est une somme d'entiers strictement positifs, $\left[\sum_{p=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}\binom{n}{2p}\right] > 0$ et ainsi, $\deg(P_n) = n$ *et* $\operatorname{codom}(P_n)=\sum_{p=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}\binom{n}{2p}$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$ . On pose $U_n = \sum_{0\le 2k\le n}\binom{n}{2k}$ *et* $V_n = \sum_{0\le 2k+1\le n}\binom{n}{2k+1}$. Calculer $U_n + V_n$ *et* $U_n - V_n$ .

$$U_n + V_n = \sum_{0\le 2k\le n}\binom{n}{2k} + \sum_{0\le 2k+1\le n}\binom{n}{2k+1} = \sum_{0\le j\le n}\binom{n}{j} = (1+1)^n = 2^n .$$

$$U_n - V_n = \sum_{0\le 2k\le n}\binom{n}{2k}(-1)^{2k} + \sum_{0\le 2k+1\le n}\binom{n}{2k+1}(-1)^{2k+1} = \sum_{0\le j\le n}\binom{n}{j}(-1)^k = (1-1)^n = 0^n = \begin{cases}1 \text{ si } n=0\\ 0 \text{ si } n\ge 1\end{cases}.$$

7. En déduire codom $(P_n)$ (où $n \in \mathbb{N}$).

Si $n = 0$, codom $(P_0) = 1$.

Si $n > 0$, alors d'après 5., $\operatorname{codom}(P_n)=\sum_{p=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}\binom{n}{2p} = U_n$ ; de plus, d'après 6., $2U_n = 2^n$ *donc* $U_n = 2^{n-1}$ ; donc,

$\operatorname{codom}(P_n)=\sum_{p=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}\binom{n}{2p} = 2^{n-1}$.

8. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer les racines réelles de $P_n$ comprises entre $-1$ *et* $1$.

Soit $x \in [-1; 1]$. Alors en posant $\theta = Arccos(x)$, on a $x = \cos(\theta)$ *et* $\theta \in [0, \pi]$.

Alors, $\tilde{P}_n(x) = \tilde{P}_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$. Par conséquent,

$x$ est racine de $\tilde{P}_n \Leftrightarrow \cos(n\theta) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/n\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\theta = \frac{(2k+1)\pi}{2n} \underbrace{\Leftrightarrow}_{car\ \theta\in[0,\pi]} \exists k \in [\![0, n-1]\!]/\theta = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$.

Donc les racines réelles de $P_n$ comprises entre $-1$ *et* $1$ sont les réels $\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$ $tq\ k \in [\![0, n-1]\!]$.

9. En déduire que $P_n$ (où $n \in \mathbb{N}$) est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples toutes comprises entre $-1$ *et* $1$ et donner cette forme scindée.

Comme les réels $\frac{(2k+1)\pi}{2n}$ $q\ k \in [\![0, n-1]\!]$ sont tous distincts dans $[0, \pi]$ et cos est injective sur $[0, \pi]$, les réels $\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$ $tq\ k \in [\![0, n-1]\!]$ sont $n$ réels distincts et constituent donc n racines distinctes de $P_n$. Or, deg $(P_n) = n$. Donc ces n racines trouvées sont les seules racines de $P_n$ et sont toutes simples dans $P_n$. $P_n$ a donc la forme scindée sur $\mathbb{R}$ suivante : $P_n = 2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}\left(X - \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\right)$.

10. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*.\ P_{n+1} = 2XP_n - P_{n-1}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $T = P_{n+1} - 2XP_n + P_{n-1}$.

Alors , $\forall\theta \in \mathbb{R}$ , $T(\cos(\theta)) = \cos((n+1)\theta) - 2\cos(\theta)\cos(n\theta) + \cos((n-1)\theta)$

$$\underbrace{=}_{\cos(x)+\cos(y)=2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)} 2\cos(\theta)\cos(n\theta) - 2\cos(\theta)\cos(n\theta) = 0.$$

Donc $T$ admet tous les réels de $[-1 ; 1]$ comme racines ; $T$ a donc une infinité de racines. Seul le polynôme nul a une infinité de racines. J'en conclus que $T = 0$ et ainsi, $P_{n+1} = 2XP_n - P_{n-1}$.

11. Retrouver, grâce à cette relation, le terme dominant de $P_n$ (où $n \in \mathbb{N}$).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\deg(2XP_n) = \deg(2X) + \deg(P_n) = 1 + n > n - 1 = \deg(P_{n-1})$. Par conséquent $deg(P_{n+1}) = \deg(2XP_n - P_{n-1}) = \deg(2XP_n)$ et $codom(P_{n+1}) = \operatorname{codom}(2XP_n) = 2codom(P_n)$ et .

Donc, la suite $(codom(P_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison 2. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*, codom(P_n) = 2^{n-1}codom(P_1) = 2^{n-1}$.

12. En utilisant les résultats précédents, donner les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$.

Pour $n = 5$ et $k = 0$, $\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$= $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$. Donc $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$ est l'une des racines de $P_5$.

Cherchons une expression de $P_5$ :

$P_3 = 2XP_2 - P_1 = 4X^3 - 3X$ puis $P_4 = 2XP_3 - P_2 = 8X^4 - 8X^2 + 1$ et enfin, $P_5 = 2XP_4 - P_3$ ; donc,

$P_5 = 16X^5 - 20X^3 + 5X = X(16X^4 - 20X^2 + 5) \underbrace{=}_{\Delta=80=(4\sqrt{5})^2} X\left(X^2 - \frac{5-\sqrt{5}}{8}\right)\left(X^2 - \frac{5+\sqrt{5}}{8}\right) = X\left(X^2 - \frac{5-\sqrt{5}}{8}\right)\left(X^2 - \frac{5+\sqrt{5}}{8}\right)$

$P_5 \underbrace{=}_{\substack{car \\ \frac{5-\sqrt{5}}{8}>0 \\ et\ \frac{5+\sqrt{5}}{8}>0}} X\left(X - \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}\right)\left(X + \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}\right)\left(X - \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}\right)\left(X + \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}\right)$ . Donc, $-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}, -\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}, 0, \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}, \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$ sont les 5 racines de $P_5$ rangées par ordre croissant. Or, $\cos\left(\frac{9\pi}{10}\right), \cos\left(\frac{7\pi}{10}\right), \cos\left(\frac{5\pi}{10}\right) = 0, \cos\left(\frac{3\pi}{10}\right), \cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$ sont aussi les 5 racines de $P_5$ rangées par ordre croissant. J'en conclus , par unicité des racines de $P_5$ , que $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$

13. En déduire que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ $et$ $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = -\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ .

$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) - 1 = 2\frac{5+\sqrt{5}}{8} - 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 2\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 1 = 2\frac{4-2\sqrt{5}}{4} - 1 = -\frac{\sqrt{5}+1}{4}$.

14. Rappeler pourquoi $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ sont les abscisses de 4 des sommets d'une pentagone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique. On donnera les affixes des 5 sommets.

D'&après le cours , les racines cinquièmes de l'unité $e^{\frac{2ik\pi}{5}} tq\ k \in [\![0,4]\!]$ sont les affixes des sommets d'un pentagone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique. Or, $Re\left(e^{\frac{2i\pi}{5}}\right) = Re\left(e^{\frac{8i\pi}{5}}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $Re\left(e^{\frac{4i\pi}{5}}\right) = Re\left(e^{\frac{6i\pi}{5}}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

Donc $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ sont les abscisses de 4 des sommets d'une pentagone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique

15. Montrer que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ sont les abscisses des points communs entre l'axe réel et le cercle $(C)$ de centre $\Omega(-\frac{1}{4}, 0)$, de rayon $\frac{\sqrt{5}}{4}$.

Soit $U$ le point de coordonnées $(\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right), 0)$ et $V$ le point de coordonnées $(\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right), 0)$

$U\Omega = \left|\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \frac{1}{4}\right| = \frac{\sqrt{5}}{4}$ et $V\Omega = \left|\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \frac{1}{4}\right| = \frac{\sqrt{5}}{4}$. Donc $U$ et $V$ sont à la fois sur le cercle de centre $\Omega(-\frac{1}{4}, 0)$, de rayon $\frac{\sqrt{5}}{4}$ et aussi sur l'axe des abscisses. Ainsi, ils sont les points communs ( il y a au plus 2 points communs)) entre l'axe réel et le cercle $(C)$ de centre $\Omega(-\frac{1}{4}, 0)$, de rayon $\frac{\sqrt{5}}{4}$ et $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ sont les abscisses des points communs entre l'axe réel et le cercle $(C)$ de centre $\Omega(-\frac{1}{4}, 0)$, de rayon $\frac{\sqrt{5}}{4}$.

16. Déduire de ce qui précède une construction à la règle <u>non graduée</u> et au compas mais sans rapporteur d'un pentagone régulier.

1. Matériel : un compas et un règle non gradué.
   - <u>Préliminaire :</u>
     a) <u>Pour tracer la médiatrice d'un segment $[A, B]$</u> , on trace deux points qui sont à égale distance de $A$ et de $B$ : on point le compas en A avec un écart de $AB$ et on trace deux arcs de part et d'autre du segment , ensuite on pointe le compas en B avec le même écart et on trace deux autres arcs de part et d'autre du segment ; ces deux arcs interceptent les deux autres arcs en deux points P et Q sui sont alors à égale distance de $A$ et de $B$ ; $(PQ)$ est alors la médiatrice de $[A, B]$, la construction de la médiatrice s'achève alors par le tracé de la droite $(PQ)$.
     b) <u>Pour tracer une droite perpendiculaire à une droite $D$ donnée en un point $A$ de $D$ donné</u>, on trace la médiatrice de deux points de $D$ dont le milieu est $A$ : on point le compas en A , on choisit un écart (quelconque non nul) et on trace deux arcs de part et d'autre de A qui interceptent D en deux points $U$ et $V$ ; A est donc le milieu de $[U, V]$ et la perpendiculaire à $D$ en $A$ est alors la médiatrice de $[U, V]$ que l'on trace avec la méthode précédente.
- <u>Cercle trigonométrique, unité et axes</u>
  - ✓ Traçons un cercle. On note O son centre et son rayon est l'unité. Ce cercle est alors le cercle trigonométrique.
  - ✓ Traçons les axes : on trace une première droite passant par O qui sera l'axe des abscisses puis grâce au préliminaire, on trace la perpendiculaire à cet axe passant par O. On oriente alors ces deux axes pour créer un repère orthonormé direct. On note $A$ et $B$ les points d'intersection entre le cercle trigonométrique et l'axe réel, points d'abscisses respectivement positive et négative
- <u>Le point $\Omega$</u> :
  - ✓ on trace la médiatrice de $[O, B]$.
  - ✓ on appelle $I$ le point d'intersection entre la médiatrice de $[O, B]$ et le segment $[O, B]$ ; $I$ est le milieu de $[O, B]$. Donc $IO = \frac{1}{2}$ et $I$ a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$.

- ✓ On trace la médiatrice de $[O, I]$.
- ✓ $\Omega$ est le milieu de $[O, I]$, le point d'intersection entre la médiatrice de $[O, I]$ et le segment $[O, I]$ . Donc $\Omega O = \frac{1}{,}$ et $\Omega$ a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$.

- Distance $\frac{\sqrt{5}}{4}$ :
$\left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right)^2 = \frac{5}{16} = \frac{4}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2$. Donc l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les deux cotés formant l'angle droit sont de longueur $\frac{1}{2}$ $et$ $\frac{1}{4}$ a pour longueur $\frac{\sqrt{5}}{4}$.
On pointe le compas en 0 , on prend l'écart $OI = \frac{1}{2}$ et on trace un arc qui intercepte l'axe des ordonnées en un point $H$ d'ordonnée positive. Alors H a pour coordonnées $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Le triangle $\Omega OH$ est donc rectangle en O et ses cotés adjacents à l'angle droit sont de longueurs ½ et ¼. Donc l'hypoténuse $[\Omega H]$ a pour longueur $\frac{\sqrt{5}}{4}$.
- Valeurs $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ :
Je pointe le compas en $\Omega$ avec un écart $\Omega H = \frac{\sqrt{5}}{4}$. Je trace le cercle. Les points d'intersection $U$ et $V$ de ce cercle avec l'axe des abscisses ont pour abscisses $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ $et$ $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.
- Sommets du pentagone.
Je trace $D$ et $D'$ les perpendiculaires à l'axe des abscisses aux points $U$ et $V$. Ces deux droites interceptent le cercle trigonométrique : on note $\underbrace{M, K}_{\in D}$ $et$ $\underbrace{N, L}_{\in D'}$ Alors, le $AMNLK$ est un pentagone régulier.