TD 16 Matrices

Systèmes linéaires.

Ex 1 Des systèmes linéaires

1. Soit λ un paramètre réel et $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Résoudre le système (S): $AX = \lambda X$, d'inconnue $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ en fonction de λ.
   Déterminer le rang de la matrice des coefficients de (S) en fonction de la valeur du paramètre λ.
2. rang de la matrice des coefficients en fonction du paramètre a.
3. Soit m un paramètre réel. Résoudre $\begin{cases} x & +my & +(m-1)z & = & 0 \\ 3x & +2y & +mz & = & 3 \\ (m-1)x & +my & +(m+1)z & = & m \end{cases}$, d'inconnue $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer le rang de la matrice des coefficients en fonction du paramètre.
4. Déterminer trois réels a, b, c tels que$\forall P \in \mathbb{R}_2[X]$, $\int_0^2 \tilde{P}(t)dt = a\tilde{P}(0) + b\tilde{P}(1) + c\tilde{P}(2)$.
5. Résoudre (S): $\begin{cases} x^3y^2z^6 = 1 \\ x^4y^5z^{12} = 2 \\ x^2y^2z^5 = 3 \end{cases}$ $d'inconnue\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
6. Soit $n \in \mathbb{N}\ tq\ n > 2$. On considère n points du plan. Existe -t-il un polygône à n côtés dont les milieux des cotés sont ces n points connus ?

Matrices symétriques-antisymétriques. Transposition et trace.

Ex 2 Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Quel est le rang de M ?
2. Ecrire M sous la forme $S + A$ avec S symétrique et A anti-symétrique.
3. Déterminer toutes les matrices P telles que : $2P - 3P^T = M$.

Ex 3 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Quel est le rang de A? Déterminer toutes les matrices L triangulaires inférieures telles que : $LL^T = A$.

Ex 4 Montrer qu'il n'existe aucunes A et B carrées d'ordre n telles que $AB - BA = I_n$.

Ex 5 Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$

1. Montrer que $A^TA = O_n \Leftrightarrow A = O_n$.
2. Montrer que $A^TA = I_n \Longrightarrow \sum_{i,j=1}^{n} {a_{ij}}^2 = n$.

Puissances de matrices par conjecture et récurrence

Ex 6 Soit $a \in \mathbb{R}\ et\ A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ex 7 Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$ tq $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Quel est le rang de A ?
2. Calculer A^{n-1} et A^n.
3. En déduire que $\forall \lambda \in \mathbb{N}$, $I + \lambda A$ est inversible et exprimer $(I + \lambda A)^{-1}$comme combinaison linéaire de $I, A, A^2, \dots, A^{n-1}$.

Ex 8 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Montrer qu'il existe une suite u telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2u_n & 1 - 2u_n & 2u_n \\ u_n & -u_n & 1 + u_n \end{pmatrix}$.
2. Expliciter A^n en fonction de n .

Ex 9 Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -3 \\ -3 & 2 & -3 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer qu'il existe deux suites a et b telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, M^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{pmatrix}$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, b_{n+2} - b_{n+1} - 20 b_n = 0$.
3. Puis expliciter M^n en fonction de l'entier n .

Ex 10 Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A + A^{-1} = I_n$. Calculer $A^k + A^{-k}$ tel que $k \in \mathbb{N}$.

Ex 11 Soit $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall k \in \{1,2,3\}, A^k = B + kC$. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*, A^k = B + kC$.

Puissances de matrices grâce à la formule du binôme de Newton. Inverse d'une matrice grâce à des matrices nilpotentes ou grâce à un polynôme annulateur.

Ex 12 Soit $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

1. Calculer B^n avec pour $n \in \mathbb{Z}$. Quel est le rang de B^n ?
2. Montrer que B est inversible et déterminer B^{-1}.

> Si $(A, B) \in M_n(K)$ et $AB = BA$ alors $\forall N \in \mathbb{N}$,
> $(A + B)^N = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} A^k B^{N-k}$.
> $$B^{N+1} - A^{N+1} = (B - A) \sum_{k=0}^{N-1} A^{N-1-k} A^k$$

Ex 13 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 8 & 6 & -2 \end{pmatrix}$

1. Calculer les puissances de A et de celles de $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 8 & 6 & -4 \end{pmatrix}$
2. Montrer que B est inversible et calculer B^k tel que $k \in \mathbb{Z}$.
3. Déterminer l'inverse de $I + A$.

> Si $A \in M_n(K)$ alors
> $\forall N \in \mathbb{N}, I - A^N = (I - A) \sum_{k=0}^{N-1} A^k$.

Ex 14 Soit $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.Calculer les puissances de A .

Application : Soit x , y et z trois suites telles que : $\begin{cases}x_0=1\\y_0=2\\z_0=-1\end{cases}$ et $\forall n\in\mathbb{N},\begin{cases}x_{n+1}=\frac{1}{4}(2x_n+y_n+z_n)\\y_{n+1}=\frac{1}{4}(x_n+2y_n+z_n)\\z_{n+1}=\frac{1}{4}(x_n+y_n+2z_n)\end{cases}$.

a. On pose $X_n=\begin{pmatrix}x_n\\y_n\\z_n\end{pmatrix}$. Exprimer X_{n+1} en fonction de X_n.
b. En déduire x_n, y_n et z_n en fonction de n.
c. Les suites x , y et z Sont –elles convergentes ?

Ex 15 Soit $a\in\mathbb{R}^*$ et $n\in\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. Soit $A=\begin{pmatrix}0&a&a^2&\cdots&a^{n-1}\\\frac{1}{a}&0&a&\cdots&a^{n-2}\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\\frac{1}{a^{n-2}}&&&\ddots&a\\\frac{1}{a^{n-1}}&\cdots&\cdots&\frac{1}{a}&0\end{pmatrix}$, $U=\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{a}\\\vdots\\\frac{1}{a^{n-1}}\end{pmatrix}$ et $V=\begin{pmatrix}1\\a\\\vdots\\a^{n-1}\end{pmatrix}$.

1. Montrer que $A=UV^T-I$.
2. En déduire A^k tel que $k\in\mathbb{N}$.
3. Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Si $\lambda_0 I+\lambda_1 A+\lambda_2 A^2+\cdots+\lambda_n A^n=0$ tq $\lambda_0\neq 0$ alors $A[-\frac{\lambda_1}{\lambda_0}I-\frac{\lambda_2}{\lambda_0}A-\cdots-\frac{\lambda_n}{\lambda_0}A^{n-1}]=I$

Ex 16 Soit $A(a,b)=(a_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ dans $M_n(K)$ telle que : $\forall i, a_{ii}=a$ et $\forall i\neq j, a_{ij}=b$ où a et b scalaires .

1. Calculer $A(a,b)^p$ où $p\in\mathbb{N}$.
2. Montrer que A^2 est combinaison linéaire de A et I . En déduire A^{-1} lorsqu'elle existe .
3. Calculer $det(A(a,b))$ (sous forme factorisée). Retrouver toutes les valeurs de (a,b) telles que $A(a,b)$ inversible.

Ex 17 Soit $x\in\mathbb{R}$. Posons $A(x)=\begin{pmatrix}ch(x)&sh(x)\\sh(x)&ch(x)\end{pmatrix}$, $J=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ et $K=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$.

1. Justifier que $A(x)$ est inversible et déterminer $A(x)^{-1}$.
2. Montrer qu'il existe $a(x)$ et $b(x)$ réels tels que : $A(x)=a(x)J+b(x)K$.
3. En déduire $A(x)^n$ tel que $n\in\mathbb{N}$. Vérifier que cette formule est vraie pour $n\in\mathbb{Z}$.

Puissances et inverse d'une matrice grâce à un polynôme annulateur et la division euclidienne. Inverse d'une matrice grâce à un annulateur et la relation de la forme $AB=I$

Ex 18 Soient $P=\begin{pmatrix}2&-3&-5\\-1&4&5\\1&-3&-4\end{pmatrix}$ et $Q=\begin{pmatrix}-1&3&5\\1&-3&-5\\-1&3&5\end{pmatrix}$.

1. P , Q et $P+Q$ sont-elles inversibles ?
2. Calculer PQ , QP , P^n et Q^n.
3. Soit $M=aP+bQ$ tels que a et b réels.
   a. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, tous réels a et b, $M=a^nP+b^nQ$.
   b. Montrer que : M est inversible $sietssi$ a et b $sont$ non nuls. Le cas échéant, déterminer l'inverse de M.

Ex 19 Soit $C \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ dont le coefficient ligne i est $c_i = i\ et\ \ A = (a_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$telle que : $a_{ij} = \frac{i}{j}$.

1. Déterminer $rg(A)$.
2. Calculer AC Puis résoudre le système linéaire $AX = C$.
3. Exprimer A^2 en fonction de A.
4. En déduire par l'absurde que A n'est pas inversible.

Ex 20 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Si $P(A) = 0$ et $X^n = P(X)Q(X) + R(X)\ \ tq\ \ \deg(R) < \deg(Q)$ alors $A^n = R(A)$.

1. Vérifier que A^2 est combinaison linéaire de $I\ et$
2. En déduire A^n.
3. Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1}.
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, A^{n+1} - 2A^n = A - 2I$.
5. On pose $G_n = A^n + A - 2I$. Exprimer G_{n+1} en fonction de G_n et retrouver A^n.

Ex 21 Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & -3 \\ 3 & 3 & -5 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer un polynôme annulateur de M.
2. En déduire $M^p\ tq\ p \in \mathbb{N}$.

Ex 22 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Exprimer A^2 comme combinaison linéaire de A et I. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.
2. Soit (E) l'équation $AX + XA = I_3$ d'inconnue $X \in M_3(\mathbb{R})$.
   a. Montre que toute solution de (E) commute avec A^2 puis avec A.
   b. En déduire toutes les solutions de (E).

Ex 23 Soit $u_0 = 2\ et\ v_0 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 4u_n - v_n\ \ et\ v_{n+1} = 2u_n + v_n$. On pose $X_n = \binom{u_n}{v_n}$.

1. Montrer qu'il existe une matrice A telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = AX_n$.
2. Vérifier que A^2 est combinaison linéaire de $I\ et\ A$.
3. En déduire A^npou $n \in \mathbb{Z}$.
4. En déduire $u_n\ et\ v_n$ en fonction de n.

Ex 24 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $P(A)$ où $P(X) = X^3 - 1$. En déduire que A est inversible et donner A^{-1}.
2. Calculer $B = \sum_{k=0}^{100} A^k$.

Ex 25 Soit $p \in \mathbb{N}^*$ .Soit $A \in M_p\ (\mathbb{R})$ telle que : $A^3 - A^2 + A - I = O$

1. Montrer que A est inversible et exprimer A^{-1} comme combinaison linéaire de I, A, A^2.
2. Montrer que :$\forall n \in \mathbb{N}, \exists (a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3, A^n = a_nA^2 + b_nA + c_nI$
3. Déterminer une matrice B telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.
4. Calculer B^r, pour r entier naturel. En déduire A^r.

Puissances et inverse d'une matrice grâce à une matrice semblable

Définition : les matrices A et B sont **semblables** lorsqu'il existe une matrice P inversible telle que $B = P^{-1}AP$.

Si $A = P^{-1}BP$ alors $\forall k \in \mathbb{N}, A^k = P^{-1}B^kP$ et (B inversible $\Longrightarrow A$ inversible et $A^{-1} = P^{-1}B^{-1}P$).

Ex 26 Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2i \\ -2i & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} i & -2i \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer P est inversible et donner P^{-1}.
2. Calculer $D = P^{-1}AP$.
3. En déduire A^k tel que $k \in \mathbb{N}$.
4. Montrer que A est inversible et déterminer A^k tel que $k \in \mathbb{Z}$.

Ex 27 Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 9 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} -9 & -2 & 3 \\ 9 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

1. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1} .
2. Montrer que : $AP = PD$.
3. En déduire que A est inversible et expliciter A^{-1} et A^k tel que $k \in \mathbb{N}$.
4. Soit $x, y, et\ z$ trois FONCTIONS dérivables sur $\mathbb{R}$ et telles que : $\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \\ z(0) = 2 \end{cases}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} x'(t) = 5x(t) - y(t) + 9z(t) \\ y'(t) = 3x(t) + 4y(t) \\ z'(t) = x(t) + y(t) + z(t) \end{cases}$.

   Et on définit les fonctions a , b et c telles que : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\underbrace{\begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \\ c(t) \end{pmatrix}}_{Y(t)} = P^{-1} \times \underbrace{\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}}_{X(t)}$ et $X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$

   a. Montrer que : $a, b, et\ c$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $Y'(t) = P^{-1} \times X'(t)$.
   b. Trouver une relation entre $A, X(t)$ et $X'(t)$ (valable pour tout réel t).
   c. En déduire une relation entre $D, Y(t) et\ Y'(t)$ (valable pour tout réel t).
   d. En déduire que a , b et c vérifient des équations différentielles linéaires d'ordre 1 et trouver les expressions de a , b et c .
   e. En déduire les expressions de $x, y, et\ z$.

Inversibilité d'une matrice grâce à l'obtention d'une relation de la forme $AB = I$

Ex 28 Soit G l'ensemble des matrices de la forme $M(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -x^2 & 1 & x \\ -2x & 0 & 1 \end{pmatrix}$ où x réel.

1. Montrer que G est stable pour le produit matriciel. G est –il stable par somme ou multiplication par un scalaire ?
2. Montrer que G contient l'élément neutre pour le produit matriciel.
3. Montrer que toute matrice de G est inversible et que son inverse apparti

$A \in M_n(K)$ est inversible $\Leftrightarrow$ $\exists B \in M_n(K) / AB = I$

EX 29 Soit $G = \left\{ M(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} / x, y, z\ \ réels \right\}$.

1. Montrer que G est stable pour le produit matriciel mais pas par combinaison linéaire de ses éléments.
2. Montrer que tout élément de G est inversible d'inverse dans G .
3. Décrire $\left(M(x,y)\right)^k tq\ k \in \mathbb{Z}$.

Ex 30 $\forall t \in \mathbb{R}, A(t) = \begin{pmatrix} 1-t & -t & 0 \\ -t & 1-t & 0 \\ -t & t & 1-2t \end{pmatrix}$ et $G = \{A(t)/t \in \mathbb{R}\}$.

1. Montrer que :$\forall t \in \mathbb{R}, A(t) = B + tC$ $où\ B\ et\ C$ sont des matrices indépendantes de t à déterminer.
2. Montrer que G est stable pour le produit matriciel .
3. Déterminer les réels t tel que $A(t)$ inversible . Le cas échéant , $A(t)^{-1}$ appartient-il à G ?

Ex 31 Soit $n \in \mathbb{N}^*\ et\ \ \omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}\ et\ A = \left(\omega^{(k-1)(l-1)}\right)_{(k,l)\in[\![1,n]\!]^2}$.Calculer $A\bar{A}$. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Ex 32 Soit $n \in \mathbb{N}^*\ et\ \ A = \left(1-\delta_{ij}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$.Calculer A^2. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Inversibilité d'une matrice grâce à la caractérisation : [A inversible $\Leftrightarrow (AX = 0 \Rightarrow X = 0)$]

Ex 33 Soit $a_1, a_2, \dots, a_n$ des réels strictement positifs et $A = \begin{pmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & & 1+a_n \end{pmatrix}$.

1. Pour $X \in M_{n,1}(K)$, calculer la matrice $X^T AX$.
2. En déduire que A est inversible .

Ex 34 Matrices à diagonales dominantes

Soit $A = \left(a_{ij}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$une matrice carrée d'ordre n telle que :$\forall i \in [\![1,n]\!], |a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$.

Nous allons prouver par l'absurde que A est inversible . Pour cela, imaginons un instant que A n'est pas inversible.

1. Justifier qu'il existe $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ tel que $X \neq 0\ et\ \ AX = 0$.
2. Justifier que $max(|x_1|,|x_2|..,|x_n|) > 0\ et\ \ \exists i_0 \in [\![1,n]\!]/\ |x_{i_0}| = max(|x_1|,|x_2|..,|x_n|)$.
3. Montrer que $\forall i \in [\![1,n]\!], \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0$.
4. En déduire que $|a_{i_0 i_0}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i_0}}^{n} |a_{i_0 j}|$.
5. Conclure à une absurdité et conclure .

Inversibilité d'une matrice par résolution d'un système :

[A **inversible** $\Leftrightarrow (\forall Y, le\ système\ linéaire\ AX = Y\ admet\ une\ unique\ solution^{**})$]

** ***cette unique solution sera, le cas échéant,*** $X = A^{-1}Y$.

Ex 35 Soit $A = \left(a_{ij}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$la matrice carrée d'ordre n telle que : $a_{ij} = \begin{cases} 0 & si\ i > j \\ j-i+1 & si\ i \leq j \end{cases}$

1. Ecrire A sous forme d'un tableau matriciel (très clair !!)
2. Justifier que A est inversible puis déterminer A^{-1} .
3. Soit J la matrice carrée d'ordre n de coefficients tous égaux à 1. Déterminer une matrice B telle que : $AB = J$.

Ex 34 Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles et si oui calculer leur inverse .

1. $M=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 4 & 1\end{pmatrix}$ et $N=\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a+b\end{pmatrix}$ où a,b réels.
2. $A=\begin{pmatrix}9 & 21 & 3\\ 3 & 17 & -4\\ -5 & -29 & 7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & i & -1 & -i\\ 1 & -1 & -1 & -1\\ 1 & -i & -1 & i\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$
3. $T=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & 0 & ⋰ & 0\\ \vdots & 0 & 1 & 0 & \vdots\\ 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{pmatrix}$, $H=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & & & \\ 0 & 1 & 2 & \ddots & (0) & \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & & \\ & & & \ddots & 2 & 1\\ & (0) & & & 1 & 2\\ & & & & 0 & 1\end{pmatrix}$, $K=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1\\ & 0 & 1 & & \vdots\\ & & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & & & 0 & 1\end{pmatrix}$, $M=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & \cdots & n\\ 0 & 0 & 0 & ⋰ & 0\\ \vdots & 0 & 3 & 0 & \vdots\\ 0 & 2 & 0 & 0 & \vdots\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{pmatrix}$,
4. $F=(a_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}\in M_n(\mathbb{R})$ *telle que*: $\begin{cases} a_{ii}=1\\ a_{i(i+1)}=2\\ a_{ij}=0 \text{ si } j\neq i \text{ et } j\neq i+1\end{cases}$.

Ex 35 Déterminer les matrices B telles que $AB=C$ où $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & 0\end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix}2 & 3 & -2\\ 4 & -1 & -2\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$ puis avec $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & -2\\ 2 & 0 & 1\\ 8 & 6 & -2\end{pmatrix}$. .

D'autres résultats généraux ...

Ex 36 Soit M une matrice carrée d'ordre n telle que la somme des coefficients d'une ligne de M est la même quelle que soit la ligne. Montrer que M^2 possède la même propriété.

Ex 37 Dans $M_n(K)$, on note E_{ij} la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient ligne i et colonne j qui vaut 1.

1. Démontrer que : $E_{ij}E_{kl}=\delta_{jk}E_{il}$ où δ_{jk} est le symbole de Kronecker.
2. Soit $A=(a_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ une matrice carrée d'ordre n .
   a. Ecrire A comme une combinaison linéaire des n^2 matrices E_{ij} .
   b. Calculer AE_{ij} *et* $E_{ij}A$.
   c. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que A et E_{ij} commutent .
   d. Décrire $C=\{A\in M_n(K)/\forall M\in M_n(K), AM=MA\}$ l'ensemble des matrices qui commutent avec toutes les matrices.

Ex 38 **1.** Soit $D=diag(\lambda_1,\lambda_2,..,\lambda_n)$ avec tous les λ_k distincts . Soit $A\in M_n(\mathbb{R})$.
Montrer que A *et* D commutent *sietssi* A est diagonale.
2.On suppose A triangulaire supérieure. Montrer que A et A^T commutent *sietssi* A est diagonale.

Ex 39 Matrices stochastiques

Définition : Soit $A=(a_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ A est dite **stochastique** lorsque $\forall i\in[\![1,n]\!], \sum_{j=1}^n a_{ij}=1$.

1. Démontrer que si P *et* Q sont stochastiques (réelles et carrées d'ordre n)alors PQ l'est aussi .
2. Soit U la colonne de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1 .
   a. Montrer que : P est stochastique ***si et ssi*** $PU=U$.

b. Redémontrer alors le résultat 1. avec cette nouvelle caractérisation des matrices stochastiques.
c. Montrer que si P est stochastique et inversible alors P^{-1} est stochastique.

Ex 40 Matrice positive

Soit $A = (a_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ une matrice de $S_n(\mathbb{R})$. A est dite positive lorsque $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}), X^T AX \geq 0$.

Soit $D = diag(d_1, \dots, d_n)$. Calculer $X^T DX$ $pour$ $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$.En déduire une CNS pour que D soit positive.

Ex 41 Soit $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n)$ avec tous les réels λ_k distincts et $A \in M_n(\mathbb{R})$ semblable à D. Soit λ un scalaire

Montrer que : le système $AX = \lambda X$ admet une solution non nulle ***si et ssi*** $\lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n\}$

Ex 42 Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Soit $X \in M_{2,1}(\mathbb{R})$ tq X non nulle. On pose $Y = AX$, $Z = AY$ et $P = (X\ \ Y)$.

Ecrire Z comme combinaison linéaire de X et Y. En déduire que $AP = PB$. Puis conclure que A et B sont semblables.

Ex 43

Définition : Soit A et B deux matrices de même taille.
On dit que A est équivalente à B lorsqu'il existe deux matrices inversibles P et Q telles que $A = PBQ$.
On note $A{\sim}B$.
On dit que A est semblable à B lorsqu'il existe une matrice inversible P telle que $A = P^{-1}BP$.

Montrer que :

1. Deux matrices semblables sont équivalentes. Deux matrices équivalentes ont le même rang.
2. a. Toute matrice est semblable (resp. équivalente) à elle-même.
   b. Si A est semblable (resp. équivalente) à B alors B est semblable (resp. équivalente) à A.
   c. Si A est semblable (resp. équivalente) à B et B est semblable (resp. équivalente) à C alors A est semblable (resp. équivalente) à C.