

TD 17 Déterminant d'une matrice carrée.

Ex 0 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -2 & 11 & -2 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$. Pour quelles valeurs du réel λ , le système $AX = \lambda X$ est-il de Cramer ?

2. Pour quels réels a, b et c , $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b & b+c & c+a \\ ab & bc & ca \end{pmatrix}$ est-elle inversible ? idem avec $M = \begin{pmatrix} 2a & a-b-c & 2a \\ b-a-c & 2b & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{pmatrix}$.

Ex 1 Résoudre le système suivant d'inconnue $(X, Y) \in M_2(\mathbb{R})^2$: $XY = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $YX = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

Ex 2 Soit (S) le système suivant $\begin{cases} tr(X)Y + tr(Y)X = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \\ XY = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \end{cases}$ d'inconnue $(X, Y) \in M_2(\mathbb{R})^2$.

1. Je suppose que (S) admette une solution notée (X_0, Y_0) .

a. Montrer que X_0 et Y_0 sont inversibles.

b. Montrer que : $tr(X_0) = 0$ ou $tr(Y_0) = 0$.

c. Supposons ici que : $tr(Y_0) = 0$. Montrer qu'il existe un réel λ non nul tel que : $Y_0 = \lambda \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$ et $X_0 = \frac{1}{12\lambda} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$.

2. En déduire les solutions de (S) .

Ex 3 Sachant que 13 divise 546, 273 et 169, montrer, sans calculer D , que $D = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix}$ est un multiple de 13.

Ex 4 Calculer $d_1 = \begin{vmatrix} 1 & \cos(a) & \cos(2a) \\ \cos(a) & \cos(2a) & \cos(3a) \\ \cos(2a) & \cos(3a) & \cos(4a) \end{vmatrix}$, $d_2 = \begin{vmatrix} 1 & a & b & ab \\ 1 & c & b & cb \\ 1 & a & d & ad \\ 1 & c & d & cd \end{vmatrix}$, $d_3 = \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & ab \\ ab & a^2 & b^2 \\ b^2 & ab & a^2 \end{vmatrix}$.

Ex 5 Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ et $P(X) = \alpha + \beta X + \gamma X^2 + X^4$. Montrer que $D = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & P(a) \\ 1 & b & b^2 & P(b) \\ 1 & c & c^2 & P(c) \\ 1 & d & d^2 & P(d) \end{vmatrix}$.

En choisissant judicieusement P de sorte que la dernière colonne soit « presque nulle », calculer D .

Ex 6 Soit n un entier impair et A une matrice carrée d'ordre n , antisymétrique. Montrer que $\det(A) = 0$.

Ex 7 Soit a et b des scalaires et $A = (a_{ij})_{(i,j) \in [1,n]^2}$ dans $M_n(K)$ telle que : $\forall i, a_{ii} = a$ et $\forall i \neq j, a_{ij} = b$.

Calculer $\det(A)$ (sous forme factorisée). Pour quelles valeurs de (a, b) , A est-elle inversible ?

Ex 8 On pose $\Delta_1 = |1|$ et $\forall n \geq 2, \Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}$ déterminant d'ordre n . Calculer Δ_n .

Ex 9 Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, on pose $\Delta_{n,1} = 1$ et $\Delta_{n,p} = \begin{vmatrix} 1 & \binom{n}{1} & \dots & \binom{n}{p-1} \\ 1 & \binom{n+1}{1} & \dots & \binom{n+1}{p-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \binom{n+p-1}{1} & \dots & \binom{n+p-1}{p-1} \end{vmatrix}$ déterminant d'ordre p .

Montrer que : pour tous $p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $n \in \mathbb{N}$, $\Delta_{n,p} = \Delta_{n+1,p} = \Delta_{n,p-1}$. En déduire la valeur de $\Delta_{n,p}$.

Ex 10 Soit a_1, a_2, \dots, a_n des réels. Calculer $\Delta_n(a_1, a_2, \dots, a_n, x) = \begin{vmatrix} x & 0 & \dots & a_n \\ 0 & x & \ddots & a_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & x & a_1 \\ a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 & x \end{vmatrix}$.

Ex 11 Soit J la matrice de $M_n(K)$ dont tous les coefficients valent 1.

1. Soit $A \in M_n(K)$. Pour tout scalaire x , on note $P(x) = \det(A + xJ)$. Démontrer qu'il existe un scalaire ω tel que : pour tout scalaire x , $P(x) = \det(A) + \omega x$. **ω dépend-il de x ? Que peut-on alors dire de P ?**

2. **Application** : Soient $(a, b, c_1, \dots, c_n) \in K^{n+2}$ tq $a \neq b$ et $M = \begin{pmatrix} c_1 & b & \dots & b \\ a & c_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a & \dots & a & c_n \end{pmatrix} \in M_n(K)$. Déterminer $\det(M)$.

Ex 12 Soit a et b réels et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Calculer $\Delta_n(a, b) = \begin{vmatrix} a & 0 & \dots & 0 & b \\ 0 & \ddots & a & b & \vdots & 0 \\ \vdots & & b & a & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & & & & 0 \\ b & 0 & \dots & 0 & a \end{vmatrix}$ d'ordre $2n$. (**NB** : $\Delta_1(a, b) = \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 - b^2$)