

**Ex 0 1.** Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -2 & 11 & -2 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$ . Pour quelles valeurs du réel  $\lambda$ , le système  $AX = \lambda X$  est-il un unique solution ?

$AX = \lambda X$  est de Cramer  $\Leftrightarrow$  le système  $(A - \lambda I)X = 0$  admet une unique solution  $\Leftrightarrow A - \lambda I$  est inversible  $\Leftrightarrow \det(A - \lambda I) \neq 0$ .

$$\begin{aligned} \text{Or, } \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 3 \\ -2 & 11-\lambda & -2 \\ 8 & -7 & 6-\lambda \end{vmatrix} \stackrel{\substack{C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 \\ C_2 \leftarrow C_2 - L_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - L_1}}{\equiv} \begin{vmatrix} 7-\lambda & 3 & 3 \\ 7-\lambda & 11-\lambda & -2 \\ 7-\lambda & -7 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (7-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 11-\lambda & -2 \\ 1 & -7 & 6-\lambda \end{vmatrix} \\ &\stackrel{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\equiv} (7-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 8-\lambda & -5 \\ 0 & -10 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (7-\lambda) \begin{vmatrix} 8-\lambda & -5 \\ -10 & 3-\lambda \end{vmatrix} \stackrel{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ C_1 \leftarrow C_1 + C_2}}{\equiv} (7-\lambda) \begin{vmatrix} 8-\lambda & -5 \\ -2-\lambda & -2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (7-\lambda)(-2-\lambda) \begin{vmatrix} 8-\lambda & -5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{\substack{C_1 \leftarrow C_1 + C_2}}{\equiv} (7-\lambda)(-2-\lambda) \begin{vmatrix} 13-\lambda & -5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (7-\lambda)(-2-\lambda)(13-\lambda). \end{aligned}$$

Ainsi,  $AX = \lambda X$  a un unique solution  $\Leftrightarrow \lambda \notin \{7; -2; 13\}$ .

2. Pour quels réels  $a, b$  et  $c$ ,  $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b & b+c & c+a \\ ab & bc & ca \end{pmatrix}$  est-elle inversible ? idem avec  $M = \begin{pmatrix} 2a & a-b-c & 2a \\ b-a-c & 2b & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{pmatrix}$ .

$$\begin{aligned} \det(M) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b & b+c & c+a \\ ab & bc & ca \end{vmatrix} \stackrel{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1}}{\equiv} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a+b & c-a & c-b \\ ab & b(c-a) & a(c-b) \end{vmatrix} = (c-a)(c-b) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a+b & 1 & 1 \\ ab & b & a \end{vmatrix} \stackrel{\substack{C_3 \leftarrow C_3 - C_2}}{\equiv} (c-a)(c-b) \\ &\quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a+b & 1 & 0 \\ ab & b & a-b \end{vmatrix} = (c-a)(c-b)(a-b). \\ \det(M) &= \begin{vmatrix} 2a & a-b-c & 2a \\ b-a-c & 2b & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} \stackrel{\substack{L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3}}{\equiv} \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ b-a-c & 2b & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b-a-c & 2b & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} \\ &\stackrel{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1}}{\equiv} (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b-a-c & a+b+c & a+b+c \\ 2c & 0 & -a-b-c \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c \\ 0 & -a-b-c \end{vmatrix} = -(a+b+c)^3. \end{aligned}$$

**Ex 1 :** Résoudre le système suivant d'inconnue  $(X, Y) \in M_2(\mathbb{R})^2 : XY = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  et  $YX = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ .

$$\begin{aligned} XY &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } YX = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow XY &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } YX = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } \det(XY) = \det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow XY &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } YX = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } \det(X)\det(Y) = 1 \\ \Leftrightarrow XY &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } YX = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } \det(X) \neq 0 \text{ et } \det(Y) \neq 0 \\ \Leftrightarrow X \text{ et } Y &\text{ inversibles et } XY = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } YX = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow X \text{ et } Y &\text{ inversibles et } Y = X^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } X^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow X \text{ et } Y &\text{ inversibles et } Y = X^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X = X \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \exists (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 / X &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ et } X \text{ et } Y \text{ inversibles et } Y = X^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \exists (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 / X &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ et } ad - cb \neq 0 \text{ et } Y \text{ inversibles et } Y = X^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{cases} 3a + c = 5a - 2b \\ 3b + d = 3a - b \\ 2a + c = 5c - 2d \\ 2b + d = 3c - d \\ -2a + 2b + c = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \exists (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 / X &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ et } ad - cb \neq 0 \text{ et } Y \text{ inversible; et } Y = X^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{cases} 3a - 4b - d = 0 \\ 2a - 4c + 2d = 0 \\ 2b - 3c + 2d = 0 \\ c = 2a - 2b \\ d = 3a - 4b \end{cases} \\ \Leftrightarrow \exists (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 / X &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ et } ad - cb \neq 0 \text{ et } Y \text{ inversible et } Y = X^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{cases} 2a - 4(2a - 2b) + 2(3a - 4b) = 0 \\ 2b - 3(2a - 2b) + 2(3a - 4b) = 0 \\ c = 2a - 2b \\ d = 3a - 4b \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \exists (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 / X &= \begin{pmatrix} a & b \\ 2a - 2b & 3a - 4b \end{pmatrix} \text{ et } a(3a - 4b) - (2a - 2b)b \neq 0 \text{ et } Y \text{ inversible et } Y = X^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \exists (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 / X &= \begin{pmatrix} a & b \\ 2a - 2b & 3a - 4b \end{pmatrix} \text{ et } 3a^2 + 2b^2 - 6ab \neq 0 \text{ et } Y \text{ inversible et } Y = \frac{1}{3a^2 + 2b^2 - 6ab} \begin{pmatrix} 3a - 4b & -b \\ 2b - 2a & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \exists (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 / X &= \begin{pmatrix} a & b \\ 2a - 2b & 3a - 4b \end{pmatrix} \text{ et } 3a^2 + 2b^2 - 6ab \neq 0 \text{ et } Y \text{ inversible et } Y = \frac{1}{3a^2 + 2b^2 - 6ab} \begin{pmatrix} 9a - 14b & 3a - 5b \\ 6b - 4a & 2b - a \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \exists (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 / 3a^2 + 2b^2 - 6ab &\neq 0 \text{ et } X = \begin{pmatrix} a & b \\ 2a - 2b & 3a - 4b \end{pmatrix} \text{ et } Y = \frac{1}{3a^2 + 2b^2 - 6ab} \begin{pmatrix} 9a - 14b & 3a - 5b \\ 6b - 4a & 2b - a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

De plus,  $3a^2 + 2b^2 - 6ab = 3(a^2 - 2ab) + 2b^2 = 3(a-b)^2 - b^2 = (\sqrt{3}a - \sqrt{3}b - b)(\sqrt{3}a - \sqrt{3}b + b)$ .

Donc,  $3a^2 + 2b^2 - 6ab \neq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{3}a - \sqrt{3}b - b) \neq 0 \text{ et } (\sqrt{3}a - \sqrt{3}b + b) \neq 0$ .

Ainsi  $sol = \left\{ \left( \begin{pmatrix} a & b \\ 2a-2b & 3a-4b \end{pmatrix}, \frac{1}{3a^2+2b^2-6ab} \begin{pmatrix} 9a-14b & 3a-5b \\ 6b-4a & 2b-a \end{pmatrix} \right) / a, b \text{ réels et } 3a^2+2b^2-6ab \neq 0 \right\}$

Ex 2 Soit (S) le système suivant  $\begin{cases} tr(X)Y + tr(Y)X = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \\ XY = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \end{cases}$  d'inconnue  $(X, Y) \in M_2(\mathbb{R})^2$ .

- Je suppose que (S) admette une solution notée  $(X_0, Y_0)$ .
  - Montrer que  $X_0$  et  $Y_0$  sont inversibles.
  - Montrer que :  $tr(X_0) = 0$  ou  $tr(Y_0) = 0$ .
  - Supposons ici que :  $tr(Y_0) = 0$ . Montrer qu'il existe un réel  $\lambda$  non nul tel que :  $Y_0 = \lambda \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$  et  $X_0 = \frac{1}{12\lambda} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$
- En déduire les solutions de (S).

Ex 3 Sachant que 13 divise 546, 273 et 169, montrer, sans calculer  $D$ , que  $D = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix}$  est un multiple de 13.

Il existe trois entiers naturels  $a, b$  et  $c$  tels que  $546 = 13a$ ,  $273 = 13b$  et  $169 = 13c$ ,

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix} \stackrel{L_3 \leftarrow L_3 + 10L_2 + 100L_1}{=} \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 546 & 273 & 169 \end{vmatrix} = 13 \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 13d. \text{ Donc } D \text{ est multiple de } 13.$$

Ex 4 Calculer les déterminants suivants :  $d_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b & b+c & c+a \\ ab & bc & ca \end{vmatrix}$ ,  $d_2 = \begin{vmatrix} 1 & \cos(a) & \cos(2a) \\ \cos(a) & \cos(2a) & \cos(3a) \\ \cos(2a) & \cos(3a) & \cos(4a) \end{vmatrix}$ ,

$$d_3 = \begin{vmatrix} 1 & a & b & ab \\ 1 & c & b & cb \\ 1 & a & d & ad \\ 1 & c & d & cd \end{vmatrix}, d_4 = \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & ab \\ ab & a^2 & b^2 \\ b^2 & ab & a^2 \end{vmatrix}, d_5 = \begin{vmatrix} 2a & a-b-c & 2a \\ b-a-c & 2b & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}, \det(A - \lambda I) \text{ où } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -2 & 11 & -2 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$$

$$d_5 = \begin{vmatrix} 2a & a-b-c & 2a \\ b-a-c & 2b & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} \stackrel{L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3}{=} \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ b-a-c & 2b & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b-a-c & 2b & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} \\ \stackrel{C_2 \leftarrow C_2 - C_1, C_3 \leftarrow C_3 - C_1}{=} (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b-a-c & 2b & 2b \\ 2c & 0 & -b-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} b+a+c & b+a+c \\ 0 & -(b+a+c) \end{vmatrix} = -(a+b+c)^3.$$

$$d_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b & b+c & c+a \\ ab & bc & ca \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a+b & c-a & c-b \\ ab & b(c-a) & a(c-b) \end{vmatrix} = (c-a)(c-b) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a+b & 1 & 1 \\ ab & b & a \end{vmatrix} = (c-a)(c-b) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a+b & 1 & 0 \\ ab & b & a-b \end{vmatrix} \\ = (c-a)(c-b)(a-b).$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos(a) & \cos(2a) \\ \cos(a) & \cos(2a) & \cos(3a) \\ \cos(2a) & \cos(3a) & \cos(4a) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \cos(a) & \cos(2a) \\ \cos(a) & \cos(2a) & \cos(3a) \\ \cos(2a) & \cos(3a) & \cos(4a) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \cos(a) & \cos(2a) \\ 0 & \cos(2a) - \cos^2(a) & \cos(3a) - \cos(a)\cos(2a) \\ 0 & \cos(3a) - \cos(2a)\cos(a) & \cos(4a) - \cos^2(2a) \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} -\sin^2(a) & -\sin(a)\sin(2a) \\ -\sin(2a)\sin(a) & -\sin^2(2a) \end{vmatrix} = \sin(a)\sin(2a) \begin{vmatrix} \sin(a) & \sin(a) \\ \sin(2a) & \sin(2a) \end{vmatrix} = \sin^2(a)\sin^2(2a) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Ex 5 Soit  $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$  et  $P(X) = \alpha + \beta X + \gamma X^2 + X^4$ .

$$1. \text{ Montrer que } D = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & P(a) \\ 1 & b & b^2 & P(b) \\ 1 & c & c^2 & P(c) \\ 1 & d & d^2 & P(d) \end{vmatrix}.$$

2. En choisissant judicieusement  $P$  de sorte que la dernière colonne soit « presque nulle », calculer  $D$ .

$$1. \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^4 \end{vmatrix} \stackrel{C_4 \leftarrow C_4 - (\alpha C_1 + \beta C_2 + \gamma C_3)}{=} \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & P(a) \\ 1 & b & b^2 & P(b) \\ 1 & c & c^2 & P(c) \\ 1 & d & d^2 & P(d) \end{vmatrix}.$$

2. Posons  $P(X) = (X-a)(X-b)(X-c)(X-k)$  et choisissons  $k$  de sorte que le coefficient de  $X^3$  soit nul dans la forme développée de  $P$ .

Or,  $\frac{\text{coeff}(X^3)}{\text{coeff}(X^3)} = -(la \text{ somme des racines de } P) = -(a+b+c+k)$ . Donc prenons  $k = -(a+b+c)$  et finalement,

$$P(X) = (X-a)(X-b)(X-c)(X+(a+b+c)).$$

$$\text{Alors, } D = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & P(a) \\ 1 & b & b^2 & P(b) \\ 1 & c & c^2 & P(c) \\ 1 & d & d^2 & P(d) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & 0 \\ 1 & b & b^2 & 0 \\ 1 & c & c^2 & 0 \\ 1 & d & d^2 & P(d) \end{vmatrix} = P(d) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \\ \text{vandermonde}$$

$$D = (d-a)(d-b)(d-c)(a+b+c+d)(c-a)(a-b)(b-c)..$$

Ex 6 Soit  $n$  un entier impair et  $A$  une matrice carrée d'ordre  $n$ , antisymétrique. Montrer que  $\det(A) = 0$ .

$$\det A = \det(A^T) = \det(-A) = (-1)^n \det(A) = -\det(A). \text{ Donc } \det(A) = 0.$$

Ex 7 Soit  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$   $a$  et  $b$  des scalaires et  $A = (a_{ij})_{(i,j) \in [1,n]^2}$  dans  $M_n(K)$  telle que :  $\forall i, a_{ii} = a$  et  $\forall i \neq j, a_{ij} = b$ .

Calculer  $\det(A)$  (sous forme factorisée). Pour quelles valeurs de  $(a, b)$ ,  $A$  est-elle inversible ?

$$A = \begin{pmatrix} a & b & & b \\ b & a & & b \\ \vdots & b & \dots & \vdots \\ b & \vdots & & b \\ b & b & & a \end{pmatrix}. \text{ Donc } \det(A) = \begin{vmatrix} a & b & & b \\ b & a & & b \\ \vdots & b & \dots & \vdots \\ b & \vdots & & b \\ b & b & & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a + (n-1)b & b & & b \\ a + (n-1)b & a & & b \\ \vdots & b & \dots & \vdots \\ a + (n-1)b & \vdots & & b \\ a + (n-1)b & b & & a \end{vmatrix} = [a + (n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & b & b & b \\ 1 & a & b & b \\ \vdots & b & a & \dots \\ 1 & \vdots & b & b \\ 1 & b & b & a \end{vmatrix} = [a + (n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & & & \\ & a-b & & \\ & & \ddots & \\ & & & a-b \end{vmatrix} = [a + (n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

Ainsi, A est inversible si et seulement si  $a + (n-1)b \neq 0$  et  $a \neq b$

**Ex 8**  $\Delta_1 = |1|$  et  $\forall n \geq 1, \Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}$  déterminant d'ordre  $n$ . Calculer  $\Delta_n$ .

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} \Delta_{n-1} = (-1)^{n-1} \Delta_{n-1}. \text{ Donc, } \Delta_n = \left[ \prod_{k=1}^{n-1} (-1)^k \right] \Delta_1 = (-1)^{\sum_{k=1}^{n-1} k} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

**Ex 9** Soit  $n$  et  $p$  deux entiers naturels. Et  $\Delta_{n,p} = \begin{vmatrix} 1 & \binom{n}{1} & \dots & \binom{n}{p-1} \\ 1 & \binom{n+1}{1} & \dots & \binom{n+1}{p-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \binom{n+p-1}{1} & \dots & \binom{n+p-1}{p-1} \end{vmatrix}$  déterminant d'ordre  $p$ .

- 1) Effectuant des opérations sur les colonnes, montrer que : pour tous  $p \in \{0,1\}$  et  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\Delta_{n,p} = \Delta_{n+1,p} = \Delta_{n,p+1}$
- 2) En déduire la valeur de  $\Delta_{n,p}$ .

$$1) \Delta_{n,p} = \begin{vmatrix} \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \dots & \binom{n}{p-1} \\ \binom{n+1}{0} & \binom{n+1}{1} & \dots & \binom{n+1}{p-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{n+p-1}{0} & \binom{n+p-1}{1} & \dots & \binom{n+p-1}{p-1} \end{vmatrix} \stackrel{C_{n+1} \leftarrow C_{n+1} + C_n}{\cong} \begin{vmatrix} \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \dots & \binom{n}{p-1} \\ \binom{n+1}{0} & \binom{n+1}{1} & \dots & \binom{n+1}{p-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{n+p-1}{0} & \binom{n+p-1}{1} & \dots & \binom{n+p-1}{p-1} \end{vmatrix} \begin{matrix} c_1 & c_2 & & c_{n+1} \\ \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \dots & \binom{n}{p-1} + \binom{n}{p-2} \\ \binom{n+1}{0} & \binom{n+1}{1} & \dots & \binom{n+1}{p-1} + \binom{n+1}{p-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{n+p-1}{0} & \binom{n+p-1}{1} & \dots & \binom{n+p-1}{p-1} + \binom{n+p-1}{p-2} \end{matrix}$$

$$\stackrel{\text{Triangle de Pascal}}{\cong} \begin{vmatrix} \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \dots & \binom{n}{p-1} \\ \binom{n+1}{0} & \binom{n+1}{1} & \dots & \binom{n+1}{p-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{n+p-1}{0} & \binom{n+p-1}{1} & \dots & \binom{n+p-1}{p-1} \end{vmatrix} \begin{matrix} c_1 & c_2 & & c_{n+1} \\ \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \dots & \binom{n+1}{p-1} \\ \binom{n+1}{0} & \binom{n+1}{1} & \dots & \binom{n+2}{p-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{n+p-1}{0} & \binom{n+p-1}{1} & \dots & \binom{n+p}{p-1} \end{matrix}$$

$$C_n \leftarrow C_n - C_{n-1} + \text{Triangle de Pascal}$$

$$\stackrel{\cong}{=} \begin{vmatrix} \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \dots & \binom{n}{p-1} & \binom{n+1}{p-1} \\ \binom{n+1}{0} & \binom{n+1}{1} & \dots & \binom{n+1}{p-1} & \binom{n+2}{p-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \binom{n+p-1}{0} & \binom{n+p-1}{1} & \dots & \binom{n+p-1}{p-1} & \binom{n+p}{p-1} \end{vmatrix} \stackrel{(\dots)}{\cong} \begin{vmatrix} \binom{n}{0} & \binom{n+1}{1} & \dots & \binom{n+1}{p-2} & \binom{n+1}{p-1} \\ \binom{n}{0} & \binom{n+2}{1} & \dots & \binom{n+2}{p-2} & \binom{n+2}{p-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \binom{n+p-1}{0} & \binom{n+p}{1} & \dots & \binom{n+p}{p-2} & \binom{n+p}{p-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \binom{n+1}{1} & \dots & \binom{n+1}{p-2} & \binom{n+1}{p-1} \\ 1 & \binom{n+2}{1} & \dots & \binom{n+2}{p-2} & \binom{n+2}{p-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \binom{n+p}{1} & \dots & \binom{n+p}{p-2} & \binom{n+p}{p-1} \end{vmatrix} = \Delta_{n+1,p}.$$

$$\Delta_{n,p} = \begin{vmatrix} \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \dots & \binom{n}{p-1} \\ \binom{n+1}{0} & \binom{n+1}{1} & \dots & \binom{n+1}{p-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{n+p-1}{0} & \binom{n+p-1}{1} & \dots & \binom{n+p-1}{p-1} \end{vmatrix} \stackrel{L_{n+1} \leftarrow L_{n+1} - L_n}{=} \begin{vmatrix} \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \dots & \binom{n}{p-1} \\ \binom{n+1}{0} & \binom{n+1}{1} & \dots & \binom{n+1}{p-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \binom{n+p-2}{0} & \dots & \binom{n+p-2}{p-2} \end{vmatrix} + \text{triangle de Pascal} \stackrel{L_n \leftarrow L_n - L_{n-1}}{=} \begin{vmatrix} \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \dots & \binom{n}{p-1} \\ \binom{n+1}{0} & \binom{n+1}{1} & \dots & \binom{n+1}{p-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \binom{n+p-3}{0} & \dots & \binom{n+p-3}{p-3} \\ 0 & \binom{n+p-2}{0} & \dots & \binom{n+p-2}{p-2} \end{vmatrix} \stackrel{L_{n+1} \leftarrow L_{n+1} - L_n}{=} \begin{vmatrix} 1 & \binom{n}{1} & \dots & \binom{n}{p-1} \\ 0 & \binom{n}{0} & \dots & \binom{n}{p-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \binom{n+p-3}{0} & \dots & \binom{n+p-3}{p-3} \\ 0 & \binom{n+p-2}{0} & \dots & \binom{n+p-2}{p-2} \end{vmatrix} = 1 \times \Delta_{n,p-1}$$

Et par conséquent,  $\Delta_{n,p+1} = \Delta_{n,p}$ .

2) Alors  $\Delta_{n,p} = \Delta_{n-1,p} = \Delta_{n-2,p} = \dots = \Delta_{0,p} = \Delta_{0,p-1} = \dots = \Delta_{0,0} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} = 1$ .

**Ex 10** Soit  $a_1, a_2, \dots, a_n$  des réels. Calculer  $\Delta_n(a_1, a_2, \dots, a_n, x) = \begin{vmatrix} x & 0 & \dots & a_n \\ 0 & x & \ddots & a_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & x & a_1 \\ a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 & x \end{vmatrix}$ .

$$\Delta_n(a_1, a_2, \dots, a_n, x) = \begin{vmatrix} x & 0 & \dots & a_n \\ 0 & x & \ddots & a_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & x & a_1 \\ a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 & x \end{vmatrix} = x \Delta_{n-1}(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, x) + (-1)^{n+1} a_n \det d'ordre n$$

$$= x \Delta_{n-1}(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, x) + (-1)^{n+1} a_n (-1)^{n-1+1} \det d'ordre n-1$$

$$= x \Delta_{n-1}(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, x) - a_n^2 x^{n-1}$$

Alors,  $\Delta_{n-1}(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, x) = x \Delta_{n-2}(a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, x) - a_{n-1}^2 x^{n-2}$  et par suite,

$$\Delta_n(a_1, a_2, \dots, a_n, x) = x^2 \Delta_{n-2}(a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, x) - a_{n-1}^2 x^{n-1} - a_n^2 x^{n-1}$$

De même,  $\Delta_{n-2}(a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, x) = x \Delta_{n-3}(a_1, a_2, \dots, a_{n-3}, x) - a_{n-2}^2 x^{n-4}$  et par suite,

$$\Delta_n(a_1, a_2, \dots, a_n, x) = x^3 \Delta_{n-3}(a_1, a_2, \dots, a_{n-3}, x) - a_{n-2}^2 x^{n-1} - a_{n-1}^2 x^{n-1} - a_n^2 x^{n-1}$$

**Conjecture :**  $\Delta_n(a_1, a_2, \dots, a_n, x) = x^{n-1} \Delta_1(a_1, x) - a_2^2 x^{n-1} - a_3^2 x^{n-1} - \dots - a_{n-2}^2 x^{n-1} - a_{n-1}^2 x^{n-1} - a_n^2 x^{n-1}$

$$= x^{n-1} (x^2 - a_1^2) - a_2^2 x^{n-1} - a_3^2 x^{n-1} - \dots - a_{n-2}^2 x^{n-1} - a_{n-1}^2 x^{n-1} - a_n^2 x^{n-1}$$

$$\Delta_n(a_1, a_2, \dots, a_n, x) = x^{n+1} - (a_1^2 - a_2^2 - \dots - a_{n-2}^2 - a_{n-1}^2 - a_n^2) x^{n-1}$$

**Init :**  $\Delta_1(a_1, x) = x^2 - a_1^2$ .

**Propag :** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Supposons que  $\Delta_n(a_1, a_2, \dots, a_n, x) = x^{n+1} - (a_1^2 - a_2^2 - \dots - a_{n-2}^2 - a_{n-1}^2 - a_n^2) x^{n-1}$ . Alors,

$$\Delta_{n+1}(a_1, a_2, \dots, a_{n+1}, x) = x \Delta_n(a_1, a_2, \dots, a_n, x) - a_{n+1}^2 x^{n-1}$$

$$= x [x^{n+1} - (a_1^2 - a_2^2 - \dots - a_{n-2}^2 - a_{n-1}^2 - a_n^2) x^{n-1}] - a_{n+1}^2 x^{n-1}$$

$$= x^{n+2} - (a_1^2 - a_2^2 - \dots - a_{n-2}^2 - a_{n-1}^2 - a_n^2 - a_{n+1}^2) x^{n-1} \text{ OK!!}$$

**Ex 11** Soit  $J$  la matrice de  $M_n(K)$  dont tous les coefficients valent 1.

1. Soit  $A \in M_n(K)$ . Pour tout scalaire  $x$ , on note  $P(x) = \det(A + xJ)$ . Démontrer qu'il existe un scalaire  $\omega$  tel que : pour tout scalaire  $x$ ,  $P(x) = \det(A) + \omega x$ .  **$\omega$  dépend-il de  $x$ ? Que peut-on alors dire de  $P$ ?**

2. **Application :** Soient  $(a, b, c_1, \dots, c_n) \in K^{n+2}$  et  $M = \begin{pmatrix} c_1 & b & \dots & b \\ a & c_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a & \dots & a & c_n \end{pmatrix} \in M_n(K)$ .

a) Dédire de 1. la valeur de  $\det(M)$  dès que  $a \neq b$ .

b) Calculer  $\det(M)$  dans le cas où  $a = b$  et  $c_1 = \dots = c_n = c$ .

$$P(x) = \det(A + xJ) = \begin{vmatrix} a_{11} + x & a_{12} + x & \dots & a_{1n} + x \\ a_{21} + x & a_{22} + x & \dots & a_{2n} + x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + x & a_{n2} + x & \dots & a_{nn} + x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + x & \dots & a_{1n} + x \\ a_{21} & a_{22} + x & \dots & a_{2n} + x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} + x & \dots & a_{nn} + x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & a_{12} + x & \dots & a_{1n} + x \\ x & a_{22} + x & \dots & a_{2n} + x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & a_{n2} + x & \dots & a_{nn} + x \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} + x & \dots & a_{1n} + x \\ a_{21} & a_{22} & a_{13} + x & \dots & a_{2n} + x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{13} + x & \dots & a_{nn} + x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & x & a_{1n} + x \\ a_{21} & x & a_{2n} + x \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & x & a_{nn} + x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & a_{12} & a_{1n} \\ x & a_{22} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{1n} + x \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{2n} + x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{nn} + x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & x & a_{1n} + x \\ a_{21} & a_{22} & x & a_{2n} + x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & x & a_{nn} + x \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} a_{11} & 1 & a_{1n} \\ a_{21} & 1 & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 1 & a_{nn} \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{1n} \\ 1 & a_{22} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix} \\
(\dots) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{nn} \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & 1 \end{vmatrix} + \dots + x \begin{vmatrix} a_{11} & 1 & a_{1n} \\ a_{21} & 1 & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 1 & a_{nn} \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{1n} \\ 1 & a_{22} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= \det(A) + x\omega \text{ où } \omega = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & 1 \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} a_{11} & 1 & a_{1n} \\ a_{21} & 1 & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 1 & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{1n} \\ 1 & a_{22} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ est indépendant de } x.
\end{aligned}$$

**APPLICATION** :  $M = \begin{pmatrix} c_1 & b & \dots & b \\ a & c_2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & b \\ a & \dots & a & c_n \end{pmatrix}$ .

a) Donc d'après 1., il existe un réel  $\omega$  tel que  $\forall x \in K, \det(M + xJ) = \det(M) + x\omega$ .  
En particulier,

$$\begin{aligned}
\text{pour } x = -a, \quad \det(M) - a\omega = \det(M - aJ) &= \begin{vmatrix} c_1 - a & b - a & \dots & b - a \\ 0 & c_2 - a & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & c_n - a \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^n (c_k - a) \quad (L1). \text{ Et,} \\
\text{pour } x = -b, \quad \det(M) - b\omega = \det(M - bJ) &= \begin{vmatrix} c_1 - b & 0 & \dots & 0 \\ a - b & c_2 - b & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a - b & \dots & a - b & 0 \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^n (c_k - b) \quad (L2).
\end{aligned}$$

Alors  $(bL1) - (aL2)$  donne :  $b\det(M) - a\det(M) = b \prod_{k=1}^n (c_k - a) - a \prod_{k=1}^n (c_k - b)$ .

Comme  $a \neq b$ , je peux conclure que :  $\det(M) = \frac{1}{b-a} [b \prod_{k=1}^n (c_k - a) - a \prod_{k=1}^n (c_k - b)]$

b)  $M = \begin{pmatrix} c & a & \dots & a \\ a & c & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & \dots & a & c \end{pmatrix} = aJ + (c - a)I$ .

$$\begin{aligned}
\det(M) &= \begin{vmatrix} c & a & \dots & a \\ a & c & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & \dots & a & c \end{vmatrix} \stackrel{C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + \dots + C_n}{\cong} \begin{vmatrix} c + (n-1)a & a & \dots & a \\ c + (n-1)a & c & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c + (n-1)a & a & \dots & a \end{vmatrix} \stackrel{\text{car le déterminant est linéaire par rapport à la première colonne}}{\cong} (c + (n-1)a) \begin{vmatrix} 1 & a & \dots & a \\ 1 & c & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a & \dots & a \end{vmatrix} \\
&\stackrel{L_2 \leftarrow L_2 - L_1, L_3 \leftarrow L_3 - L_1, \dots, L_n \leftarrow L_n - L_1}{\cong} (c + (n-1)a) \begin{vmatrix} 1 & a & \dots & a \\ 0 & c - a & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c - a \end{vmatrix} \stackrel{\text{en développant par rapport à la première colonne}}{\cong} (c + (n-1)a) \underbrace{\begin{vmatrix} c - a & 0 & 0 \\ 0 & c - a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c - a \end{vmatrix}}_{\text{déterminant d'ordre } n-1}
\end{aligned}$$

car le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des coefficients de la diagonale.

$$\det(M) \cong (c + (n-1)a)(c - a)^{n-1}.$$

Ainsi,  $M$  est inversible si et seulement si  $c \notin \{-(n-1)a, a\}$ .

**Ex 12** Soit  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ . Calculer  $\Delta_n(a, b) = \begin{vmatrix} a & 0 & \dots & 0 & b \\ 0 & \ddots & a & b & \vdots \\ \vdots & \vdots & b & a & \vdots \\ 0 & \ddots & \vdots & \vdots & 0 \\ b & 0 & \dots & 0 & a \end{vmatrix}$  déterminant d'ordre  $2n$ .

$$\Delta_n(a, b) = \begin{vmatrix} a & 0 & \dots & 0 & b \\ 0 & \ddots & a & b & \vdots \\ \vdots & \vdots & b & a & \vdots \\ 0 & \ddots & \vdots & \vdots & 0 \\ b(-1)^{2n+1} & 0 & \dots & 0 & a \end{vmatrix} = a \underbrace{\begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}}_{\text{det d'ordre } 2n-1} + \underbrace{(-1)^{2n+1}}_{=-1} b \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & b(-1)^{2n-1+1} \\ a & 0 & b & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & b & 0 & 0 \\ b & 0 & a & 0 \end{vmatrix}}_{\text{det d'ordre } 2n-1}$$

$$= a^2 \begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & 0 \\ b & 0 & a \end{vmatrix} - b^2 \begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & 0 \\ b & 0 & a \end{vmatrix} = (a^2 - b^2)\Delta_{n-1}(a, b). \text{ La suite } (\Delta_n(a, b)) \text{ est donc géométrique de raison } (a^2 - b^2). \text{ Ainsi,}$$

$$\forall n, \Delta_n(a, b) = (a^2 - b^2)^{n-1} \Delta_1(a, b) = (a^2 - b^2)^{n-1} \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = (a^2 - b^2)^n.$$

**Ex 13**

- Démontrer que  $AS_n(\mathbb{R}) \oplus S_n(\mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R})$ .
- $\forall M \in M_n(\mathbb{R}), f(M) = M^T$ . Calculer  $\det(f)$ .

Pour toute matrice  $M \in M_n(\mathbb{R}), M = \underbrace{\frac{1}{2}(M + M^T)}_{\in S_n(\mathbb{R})} + \underbrace{\frac{1}{2}(M - M^T)}_{\in AS_n(\mathbb{R})}$  est l'unique écriture de  $M$  comme somme d'une matrice de

$S_n(\mathbb{R})$  et d'une matrice de  $AS_n(\mathbb{R})$ . Donc,  $AS_n(\mathbb{R}) \oplus S_n(\mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R})$ . Alors la concaténation d'une base  $B_1$  de  $AS_n(\mathbb{R})$  et d'une base  $B_2$  de  $S_n(\mathbb{R})$  donne une base  $B$  de  $M_n(\mathbb{R})$ .

Alors  $mat_B f = \text{diag} \left( \underbrace{-1, -1, \dots, -1}_{\dim(AS_n(\mathbb{R}))}, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{\dim S_n(\mathbb{R})} \right)$ . Donc  $\det(f) = (-1)^{\dim(AS_n(\mathbb{R}))}$ . Or  $\dim(AS_n(\mathbb{R})) = \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{(n-1)n}{2}$ . Ainsi,

$$\det(f) = (-1)^{\frac{(n-1)n}{2}}.$$

**Ex 14** Soit  $E = \mathbb{R}_n[X]$  et  $f$  définie sur  $E$  par  $f(P) = \frac{1}{2} \left( P \left( \frac{X}{2} \right) + P \left( \frac{X+1}{2} \right) \right)$ .

- Montrer que  $f$  est un automorphisme de  $E$ .
- Déterminer tous les réels  $\lambda$  tels qu'il existe un polynôme  $P$  de  $E$  non nul vérifiant  $f(P) = \lambda P$ .
- Pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket, Q_k \in \mathbb{R}[X]$  tel que :  $Q_k \neq 0$  et  $f(Q_k) = \frac{1}{2^k} Q_k$ . Montrer que  $(Q_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ .
- Donner la matrice de  $f$  dans cette nouvelle base et calculer  $\det(f)$ .

$$1. f(\alpha P + \beta Q) = \frac{1}{2} \left( \alpha P \left( \frac{X}{2} \right) + \beta Q \left( \frac{X}{2} \right) + \alpha P \left( \frac{X+1}{2} \right) + \beta Q \left( \frac{X+1}{2} \right) \right) = \frac{\alpha}{2} \left( P \left( \frac{X}{2} \right) + P \left( \frac{X+1}{2} \right) \right) + \frac{\beta}{2} \left( Q \left( \frac{X}{2} \right) + Q \left( \frac{X+1}{2} \right) \right) = \alpha f(P) + \beta f(Q).$$

$$\text{De plus, } f(X^k) = \frac{1}{2} \left( \left( \frac{X}{2} \right)^k + \left( \frac{X+1}{2} \right)^k \right) = \frac{1}{2^{k+1}} (X^k + (X+1)^k) = \frac{1}{2^{k+1}} (2X^k + T_k(X)) = \frac{1}{2^k} \left( X^k + \frac{1}{2} T_k(X) \right) \text{ avec } \deg T_k < k. \text{ Donc}$$

$$\deg(f(X^k)) = k. \text{ Ainsi, } \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, f(X^k) \in \mathbb{R}_n[X].$$

Par conséquent,  $\forall P = \sum_{k=0}^n a_k X^k, f(P) = \sum_{k=0}^n a_k f(X^k)$  donc  $\deg f(P) \leq \max_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket} \deg f(X^k) \leq n$ . Donc,  $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], f(P) \in \mathbb{R}_n[X]$ . J'en conclus que  $f$  est un endomorphisme de  $E$ .

De plus,  $f$  envoie la base canonique de  $\mathbb{R}_n[X]$  sur la famille  $(f(X^k))_{k=0..n}$ . Cette famille  $(f(X^k))_{k=0..n}$  est une famille de polynômes de  $\mathbb{R}_n[X]$ , échelonnée en degré sans polynôme nul, donc est libre. De plus,  $\text{card}(f(X^k))_{k=0..n} = n + 1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$ . J'en déduis que  $(f(X^k))_{k=0..n}$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ . Comme  $f$  envoie une base sur une autre base, je peux conclure que  $f$  est un automorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

3.  $\lambda$  est un réel vérifiant qu'il existe un polynôme  $P$  de  $E$  non nul tel que  $f(P) = \lambda P$

- $\Leftrightarrow \text{Ker}(f - \lambda id_E) \neq \{0\}$ .
- $\Leftrightarrow f - \lambda id_E$  n'est pas injective
- $\Leftrightarrow f - \lambda id_E$  n'est pas bijective
- $\Leftrightarrow \det(f - \lambda id_E) = 0$
- $\Leftrightarrow \det[\text{mat}_{B_c}(f - \lambda id_E)] = 0$

Or,  $\text{mat}_{B_c}(f - \lambda id_E) = \text{mat}_{B_c}(f) - \lambda \text{mat}_{B_c}(id_E)$  est triangulaire supérieure et sa diagonale est constituée des réels  $\frac{1}{2^k} - \lambda$  tq  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

Donc,  $\det[\text{mat}_{B_c}(f - \lambda id_E)] = \prod_{k=0}^n \left( \frac{1}{2^k} - \lambda \right)$ . Ainsi,  $\det(f - \lambda id_E) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \left\{ \frac{1}{2^k} / k \in \llbracket 0, n \rrbracket \right\}$ .

4. D'après ce qui précède, pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \text{Ker} \left( f - \frac{1}{2^k} id_E \right) \neq \{0\}$  donc il existe  $Q_k \in \mathbb{R}[X]$  tel que :  $Q_k \neq 0$  et  $f(Q_k) = \frac{1}{2^k} Q_k$ .

Montrer que  $B = (Q_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ . Pour cela, montrons d'abord que  $\deg(Q_k) = k$ .

Posons  $Q_k = \sum_{j=0}^p a_j X^j$  tq  $p = \deg(Q_k)$  et  $a_p \neq 0$ . Alors,  $f(Q_k) = \sum_{j=0}^p a_j f(X^j) = \sum_{j=0}^p a_j \frac{1}{2^j} \left( X^j + \frac{1}{2} T_j(X) \right)$ . Or,  $f(Q_k) = \frac{1}{2^k} Q_k$ .

Donc,  $\sum_{j=0}^p a_j \frac{1}{2^j} \left( X^j + \frac{1}{2} T_j(X) \right) = \frac{1}{2^k} \sum_{j=0}^p a_j X^j$ . Alors, par identification des coefficients dominants,  $a_p \frac{1}{2^p} = a_p \frac{1}{2^k}$  i.e.  $a_p \left( \frac{1}{2^p} - \frac{1}{2^k} \right) = 0$

Donc comme  $a_p \neq 0, \frac{1}{2^p} - \frac{1}{2^k} = 0$  et par suite  $p = k$ .

Ainsi, la famille  $(Q_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$  est échelonnée en degré donc libre. De plus, cette famille contient  $n + 1$  polynômes de  $\mathbb{R}_n[X]$ . Comme  $n + 1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$ , je peux conclure que  $(Q_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

$$4. \text{mat}_B f = \text{diag} \left( 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots, \frac{1}{2^n} \right). \text{ Donc } \det(f) = \prod_{k=0}^n \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{\sum_{k=0}^n k}} = \frac{1}{2^{\frac{n(n+1)}{2}}}.$$

**Ex 15** Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  canoniquement associé à  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -2 & 11 & -2 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$ .

- Déterminer tous les couples  $(\lambda, U) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$  tels  $U \neq (0,0,0)$  et  $f(U) = \lambda U$ .
- En déduire que  $A$  est semblable à  $D = \text{diag}(-2, 7, 13)$