

Programme de colle 24

Révision : résolution des équations différentielles d'ordre 2 et suites récurrentes linéaires d'ordre 2 (**)+

Chapitre 17 Déterminants

Cf programme précédent.

Chapitre 18 Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels . Familles finies de vecteurs.

I Généralités.

1. Définition et règles de calcul

$(E, +, \cdot)$ est un K-e-v lorsque E est non vide et

P1 $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, \vec{x} + \vec{y} \in E$ et $\forall \vec{x} \in E, \forall \alpha \in K, \alpha \cdot \vec{x} \in E$ (**E est stable par addition interne et multiplication externe**).

P2. $(+)$ est ASSOCIATIVE et COMMUTATIVE i.e. $\forall (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \in E^3, (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$ et $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$

P3. $(+)$ a un élément NEUTRE noté $\vec{0}_E$ ou $\vec{0}$ qui vérifie : $\forall \vec{x} \in E, \vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$.

P4. Tout élément \vec{x} de E a un unique SYMETRIQUE pour $(+)$. $\forall \vec{x} \in E, \exists ! \vec{y} \in E / \vec{x} + \vec{y} = \vec{0}$. Alors, \vec{y} est noté $-\vec{x}$ et appelé l'opposé de \vec{x} . ($\vec{z} + (-\vec{x})$ est désormais noté $\vec{z} - \vec{x}$)

P5. $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, \forall (\alpha, \beta) \in K^2, \alpha \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \alpha \cdot \vec{x} + \alpha \cdot \vec{y}$ et $(\alpha + \beta) \cdot \vec{x} = \alpha \cdot \vec{x} + \beta \cdot \vec{x}$ (\cdot) est distributive sur $(+)$)

P6. $\forall \vec{x} \in E, \forall (\alpha, \beta) \in K^2, \alpha \cdot (\beta \cdot \vec{x}) = \alpha\beta \cdot \vec{x} = \beta \cdot (\alpha \cdot \vec{x})$ (associativité mixte)

P7. $\forall \vec{x} \in E, 1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$

Si \vec{x}, \vec{y} et $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p$ sont des vecteurs de E alors

tout vecteur de la forme $\alpha \cdot \vec{x} + \beta \cdot \vec{y}$ tq $\alpha, \beta \in K$ est une combinaison linéaire des vecteurs \vec{x} et \vec{y} et est élément de E .

tout vecteur de la forme $\sum_{k=1}^p \alpha_k \vec{u}_k$ tq $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in K$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p$ et est élément de E .

Tout espace vectoriel est stable par combinaison linéaire.

Règle de calcul dans un K-e-v E :

C1 $\forall \vec{x} \in E, \forall \alpha \in K, (\alpha \cdot \vec{x} = \vec{0}$ si et ssi $\alpha = 0$ ou $\vec{x} = \vec{0}_E$)

C2 $\forall \vec{x} \in E, \forall \alpha \in K, -\vec{x} = (-1) \cdot \vec{x}$ et $-(\alpha \cdot \vec{x}) = (-\alpha) \cdot \vec{x} = \alpha \cdot (-\vec{x})$

C3 $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, \forall (\alpha, \beta) \in K^2 (\alpha - \beta) \cdot \vec{x} = \alpha \vec{x} - \beta \vec{x}$ et $\alpha \cdot (\vec{x} - \vec{y}) = \alpha \vec{x} - \alpha \vec{y}$

Généralisation des propriétés P2 à 7 : Soit $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p$ des vecteurs d'un K-e-v E et $\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_p$ des éléments de K .

$\sum_{k=1}^p \vec{u}_k = \sum_{k=1}^r \vec{u}_k + \sum_{k=r+1}^p \vec{u}_k$ où $r \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$.

$\sum_{k=1}^p \vec{u}_k = \sum_{i=0}^{p-1} \vec{u}_{p-i}$ et $\sum_{k=1}^p (\sum_{j=1}^n \vec{u}_{kj}) = \sum_{j=1}^n (\sum_{k=1}^p \vec{u}_{kj})$

$\sum_{k=1}^p \alpha_k \vec{x} = (\sum_{k=1}^p \alpha_k) \vec{x}$ et $\alpha \sum_{k=1}^p \vec{u}_k = \sum_{k=1}^p \alpha \vec{u}_k$

2. Espaces vectoriels de référence.

Munis de leur addition et de leur multiplication externe usuelles,

P (l'ensemble des vecteurs du plan), E (l'ensemble des vecteurs de l'espace géométrique) sont des \mathbb{R} -e-v

$K, K^n, M_{n,p}(K), K^{\mathbb{N}}, F(\Omega, K), K[X]$ sont des K-e-v.

3. Espace produit- Espace de fonctions.

Structure de K-e-v. de $\mathcal{F}(T, E)$ où E est un K-e-v et T un ensemble. Structure de K-e-v. de $E \times F$ où E et F sont deux K-e-v.

II Sous-espaces vectoriels.

1. Définition

Soit $(E, +, \cdot)$ un K-e-v. F est un sous-espace-vectoriel de E lorsque

D1 $F \subset E$

D2 $\vec{0}_E \in F$ **OU** $F \neq \emptyset$

D3 $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in F^2, \forall \alpha \in K, \alpha \vec{x} \in F$ et $\vec{x} + \vec{y} \in F$ **OU** $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in F^2, \forall (\alpha, \beta) \in K^2, \alpha \vec{x} + \beta \vec{y} \in F$.

Tout ss-e-v d'un K-e-v est un K-e-v et est stable par somme, multiplication par un scalaire, par combinaison linéaire.

2. Sous-espaces vectoriels de référence.

Pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}, C^k(I, K)$ est un ss-e-v de $F(I, K)$.

Pour tout $m \in \mathbb{N}, K_m[X]$ est un ss-e-v de $K[X]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*, A_n(K), S_n(K)$ est un ss-e-v de $M_n(K)$.

3. Sous-e-v engendré par une famille de vecteurs.

Soit E un K-e-v et $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p$ des vecteurs de E . L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p$ est un ss-e-v de E noté $\text{vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$ et appelé ss-e-v engendré par la famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$

$(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$ est une famille génératrice de $\text{vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$.

Droite vectorielle et plan vectoriel. Une droite vectorielle de E est un ss-e-v engendré par un vecteur non nul de E .

Un plan vectoriel de E est un ss-e-v de E engendré par deux vecteurs non colinéaires de E .

Soit X un sous-ensemble de E et $\text{vect}(X)$ est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires d'éléments de X . Alors, $\text{vect}(X)$ est un ss-e-v de E et est contenu dans tout ss-e-v de E contenant X . $\text{vect}(X)$ est appelé l'espace vectoriel engendré par X .

4. Intersection et somme de ss-e-v

• Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de ss-e-v de E . Alors $\bigcap_{i \in I} F_i = \{\vec{x} \in E / \forall i \in I, \vec{x} \in F_i\}$ est un ss-e-v de E .

• $\text{vect}(X)$ est inclus dans tout ss-e-v de E contenant X et est donc le plus petit ss-e-v (au sens de l'inclusion) contenant la famille X

$$\text{vect}(X) = \bigcap_{\substack{F \text{ ss-e-v de } E \\ X \subset F}} F$$

- Soit F et G deux ss-e-v de E . Alors $F + G = \{\vec{x} + \vec{y} / \vec{x} \in F, \vec{y} \in G\} = \{\vec{u} \in E / \exists \vec{x} \in F, \vec{y} \in G, \vec{u} = \vec{x} + \vec{y}\}$ est ss-e-v de E appelé ss-e-v somme de F et G .
- Si $F = \text{vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$ et $G = \text{vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_q)$ alors $F + G = \text{vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_q)$.
- $\text{Vect}(F \cup G) = F + G$.

5. Somme directe et sous-espaces supplémentaires.

Soit F et G deux ss-e-v de E .

- F et G sont en somme directe si et si $F \cap G = \{\vec{0}_E\}$.
- F et G sont supplémentaires dans E si et si $F \cap G = \{\vec{0}_E\}$ et $F + G = E$.
- F et G sont en somme directe lorsque tout élément de $F + G$ s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de F et d'un élément de G .
- F et G sont supplémentaires dans E lorsque tout élément de E s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de F et d'un élément de G . On note alors $E = F \oplus G$. (définition)

(**) Cela pourra faire l'objet d'un exercice de colle.

Questions de cours :

QDC 1 Démontrer que dans le $K - e - v (E, +, \cdot), \forall \vec{x} \in E, \forall \alpha \in K. (\alpha \cdot \vec{x} = \vec{0} \text{ si et si } \alpha = 0 \text{ ou } \vec{x} = \vec{0}_E)$

QDC 2 Soit E un $K - e - v$ et $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ des vecteurs de E . Montrer que l'ensemble $\text{vect}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ est un ss-e-v de E .

QDC 3 Soit E un $K - e - v$. Démontrer que l'intersection de ss-e-v de E est un ss-e-v de E . Prouver que la réunion de deux ss-e-v de E n'est pas forcément un ss-e-v de E .

QDC 4 Démontrer la caractérisation de deux ss-e-v supplémentaires.