DL Matrices et espaces vectoriels

Exercice 1

1. Montrer que $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ définie par : $f\big((x,y,z,t)\big) = (x-y+t, z-2x, z+2y-t, t+y)$ est bijective et donner une expression de f^{-1}.
2. Déduire du calcul précédent l'inversibilité et l'inverse de la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$?

Exercice 2

A. On appelle matrice magique toute matrice carrée telle que la somme des coefficients de chaque ligne soit la même quelle que soit la ligne et la somme des coefficients de chaque colonne soit la même quelle que soit la colonne. Soit E l'ensemble des matrices carrées d'ordre n, réelles et magiques où $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que si $A \in E$ alors la somme des coefficients de n'importe quelle ligne de A est égale à la somme des coefficients de n'importe quelle colonne de A.
2. Soit $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que : $A \in E \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} /\ AU = \lambda U$ et $U^T A = \lambda U^T$.
3. Montrer que si $A\ et\ B$ sont carrées d'ordre n et magiques alors AB est magique.
4. Montrer que si A est magique et inversible alors son inverse est magique.
5. Montrer que E est un ss-e-v de $M_n(\mathbb{R})$.

B. Désormais $n = 3$.

6. Déterminer une famille génératrice de E.
7. Soit $D = diag(1,2,3)\ et\ F$ l'ensemble des matrices réelles qui commutent avec D.
   a. Montrer que F est un ss-e-v de $M_3(\mathbb{R})$.
   b. Donner une famille génératrice de F.
   c. E et F sont-ils en somme directe ? Donner une famille génératrice de $E \cap F$.
8. Soit $G = \{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d \\ a & b & c \end{pmatrix} / a, b, c\ , d\ réels\}$. Montrer que $E \oplus G = M_3(\mathbb{R})$.