

Programme de colle 25

Révision : résolution des équations différentielles d'ordre 2 et suites récurrentes linéaires d'ordre 2 (**)+

Chapitre 18 Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels . Familles finies de vecteurs.

I Généralités.

$(E, +, \cdot)$ est un K-e-v lorsque E est non vide et

P1 $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, \vec{x} + \vec{y} \in E$ et $\forall \vec{x} \in E, \forall \alpha \in K, \alpha \cdot \vec{x} \in E$ (**E est stable par addition interne et multiplication externe**).

P2. $(+)$ est ASSOCIATIVE et COMMUTATIVE i.e. $\forall (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \in E^3, (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$ et $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$

P3. $(+)$ a un élément NEUTRE noté $\vec{0}_E$ ou $\vec{0}$ qui vérifie : $\forall \vec{x} \in E, \vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$.

P4. Tout élément \vec{x} de E a un unique SYMETRIQUE pour $(+)$. $\forall \vec{x} \in E, \exists ! \vec{y} \in E / \vec{x} + \vec{y} = \vec{0}$. Alors, \vec{y} est noté $-\vec{x}$ et appelé l'opposé de \vec{x} . $(\vec{z} + (-\vec{x}))$ est désormais noté $\vec{z} - \vec{x}$

P5. $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, \forall (\alpha, \beta) \in K^2, \alpha \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \alpha \cdot \vec{x} + \alpha \cdot \vec{y}$ et $(\alpha + \beta) \cdot \vec{x} = \alpha \cdot \vec{x} + \beta \cdot \vec{x}$ ((\cdot) est distributive sur $(+)$)

P6. $\forall \vec{x} \in E, \forall (\alpha, \beta) \in K^2, \alpha \cdot (\beta \cdot \vec{x}) = \alpha\beta \cdot \vec{x} = \beta \cdot (\alpha \cdot \vec{x})$ (associativité mixte)

P7. $\forall \vec{x} \in E, 1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$

Si \vec{x}, \vec{y} et $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p$ sont des vecteurs de E alors

tout vecteur de la forme $\alpha \cdot \vec{x} + \beta \cdot \vec{y}$ tq $\alpha, \beta \in K$ est une combinaison linéaire des vecteurs \vec{x} et \vec{y} et est élément de E .

tout vecteur de la forme $\sum_{k=1}^p \alpha_k \vec{u}_k$ tq $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in K$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p$ et est élément de E .

Tout espace vectoriel est non vide et stable par combinaison linéaire.

Règle de calcul dans un K-e-v E :

C1 $\forall \vec{x} \in E, \forall \alpha \in K. (\alpha \cdot \vec{x} = \vec{0}$ si et ssi $\alpha = 0$ ou $\vec{x} = \vec{0}_E$)

C2 $\forall \vec{x} \in E, \forall \alpha \in K, -\vec{x} = (-1) \cdot \vec{x}$ et $-(\alpha \cdot \vec{x}) = (-\alpha) \cdot \vec{x} = \alpha \cdot (-\vec{x})$

C3 $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, \forall (\alpha, \beta) \in K^2 (\alpha - \beta) \cdot \vec{x} = \alpha \vec{x} - \beta \vec{x}$ et $\alpha \cdot (\vec{x} - \vec{y}) = \alpha \vec{x} - \alpha \vec{y}$

Généralisation des propriétés P2 à 7 : Soit $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p$ des vecteurs d'un $K - e - v E$ et $\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_p$ des éléments de K .

$\sum_{k=1}^p \vec{u}_k = \sum_{k=1}^r \vec{u}_k + \sum_{k=r+1}^p \vec{u}_k$ où $r \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$.

$\sum_{k=1}^p \vec{u}_k = \sum_{i=0}^{p-1} \vec{u}_{p-i}$ et $\sum_{k=1}^p (\sum_{j=1}^n \vec{u}_{kj}) = \sum_{j=1}^n (\sum_{k=1}^p \vec{u}_{kj})$

$\sum_{k=1}^p \alpha_k \vec{x} = (\sum_{k=1}^p \alpha_k) \vec{x}$ et $\alpha \sum_{k=1}^p \vec{u}_k = \sum_{k=1}^p \alpha \vec{u}_k$

1. Espaces vectoriels de référence.

Munis de leur addition et de leur multiplication externe usuelles,

P (l'ensemble des vecteurs du plan), E (l'ensemble des vecteurs de l'espace géométrique) sont des $\mathbb{R} - e - v$

$K, K^n, M_{n,p}(K), K^{\mathbb{N}}, F(\Omega, K), K[X]$ sont des $K - e - v$.

2. Espace produit- Espace de fonctions.

Structure de $K - e - v$. de $\mathcal{F}(T, E)$ où E est un $K - e - v$ et T un ensemble. Structure de $K - e - v$. de $E \times F$ où E et F sont deux $K - e - v$.

II Sous-espaces vectoriels.

1. Définition

Soit $(E, +, \cdot)$ un $K - e - v$. F est un sous-espace-vectoriel de E lorsque

D1 $F \subset E$

D2 $\vec{0}_E \in F$ **OU** $F \neq \emptyset$

D3 $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in F^2, \forall \alpha \in K, \alpha \vec{x} \in F$ et $\vec{x} + \vec{y} \in F$ **OU** $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in F^2, \forall (\alpha, \beta) \in K^2, \alpha \vec{x} + \beta \vec{y} \in F$.

Tout ss-e-v d'un K-e-v est un K-e-v et est stable par somme, multiplication par un scalaire, par combinaison linéaire.

2. Sous-espaces vectoriels de référence.

Pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}, C^k(I, K)$ est un ss-e-v de $F(I, K)$.

Pour tout $m \in \mathbb{N}, K_m[X]$ est un ss-e-v de $K[X]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*, A_n(K), S_n(K)$ est un ss-e-v de $M_n(K)$.

3. Sous-e-v engendré par une famille de vecteurs.

Soit E un $K - e - v$ et $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p$ des vecteurs de E . L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p$ est un ss-e-v de E noté $\text{vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$ et appelé ss-e-v engendré par la famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$

$(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$ est une famille génératrice de $\text{vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$.

Droite vectorielle et plan vectoriel. Une droite vectorielle de E est un ss-e-v engendré par un vecteur non nul de E .

Un plan vectoriel de E est un ss-e-v de E engendré par deux vecteurs non colinéaires de E .

Soit X un sous-ensemble de E et $\text{vect}(X)$ est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires d'éléments de X . Alors, $\text{vect}(X)$ est un ss-e-v de E et est contenu dans tout ss-e-v de E contenant X . $\text{vect}(X)$ est appelé l'espace vectoriel engendré par X .

4. Intersection et somme de ss-e-v

• Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de ss-e-v de E . Alors $\bigcap_{i \in I} F_i = \{\vec{x} \in E / \forall i \in I, \vec{x} \in F_i\}$ est un ss-e-v de E .

• $\text{vect}(X)$ est inclus dans tout ss-e-v de E contenant X et est donc le plus petit ss-e-v (au sens de l'inclusion) contenant la famille X

$$\text{vect}(X) = \bigcap_{\substack{F \text{ ss-e-v de } E \\ X \subset F}} F$$

• Soit F et G deux ss-e-v de E . Alors $F + G = \{\vec{x} + \vec{y} / \vec{x} \in F, \vec{y} \in G\} = \{\vec{u} \in E / \exists \vec{x} \in F, \vec{y} \in G, \vec{u} = \vec{x} + \vec{y}\}$ est ss-e-v de E appelé ss-e-v somme de F et G .

• Si $F = \text{vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$ et $G = \text{vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_q)$ alors $F + G = \text{vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_q)$.

• $\text{Vect}(F \cup G) = F + G$.

5. Somme directe et sous-espaces supplémentaires.

Soit F et G deux ss-e-v de E .

- F et G sont en somme directe si et seulement si $F \cap G = \{\vec{0}_E\}$.
- F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si $F \cap G = \{\vec{0}_E\}$ et $F + G = E$.
- F et G sont en somme directe lorsque tout élément de $F + G$ s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de F et d'un élément de G .
- F et G sont supplémentaires dans E lorsque tout élément de E s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de F et d'un élément de G . On note alors $E = F \oplus G$. (définition)

III Famille finie libre ou/et génératrice. Base.

1. Famille libre

Définition

Soit E un K -e-v et $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$ une famille de vecteurs de E .

- $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$ est une famille libre lorsque la seule manière d'écrire $\vec{0}_E$ comme combinaison linéaire de $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p$ est la manière triviale $\vec{0}_E = 0 \cdot \vec{u}_1 + 0 \cdot \vec{u}_2 + \dots + 0 \cdot \vec{u}_p$; autrement dit lorsque l'équation $\vec{0}_E = \lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{u}_2 + \dots + \lambda_p \cdot \vec{u}_p$ d'inconnue $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \in K^p$ admet $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) = (0, 0, \dots, 0)$ comme unique solution.
- $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$ est une famille liée lorsque $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$ n'est pas libre; autrement dit lorsqu'il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \neq (0, 0, \dots, 0)$ tel que $\vec{0}_E = \lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{u}_2 + \dots + \lambda_p \cdot \vec{u}_p$.

Caractérisation

- $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$ est une famille libre si et seulement si aucun vecteur de cette famille n'est combinaison linéaire des autres.
- $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$ est une famille liée si et seulement si l'un des vecteurs de cette famille est combinaison linéaire des autres.

Opérations

- La liberté d'une famille ne dépend pas de l'ordre des vecteurs dans cette famille.
- Si l'on ajoute à une famille libre \mathcal{L} un vecteur qui n'est pas combinaison linéaire des vecteurs de \mathcal{L} alors la famille obtenue est encore libre.
- Toute famille extraite d'une famille libre est encore libre (i.e. si on ôte des vecteurs à une famille libre, la famille conserve la liberté).
- Les opérations élémentaires sur les vecteurs d'une famille libre \mathcal{L} conserve la liberté de \mathcal{L} .

Exemples à connaître et reconnaître

- Toute famille de polynômes non nuls et tous de degrés distincts est libre.
- Toute famille de n -uplets non nuls et échelonnés en zéros (par la droite ou la gauche) ou de matrices-colonnes non nulles et échelonnées en zéros (par le haut ou le bas) est libre.

Propriété

- Si \mathcal{L} est une famille libre alors tout vecteur de $\text{vect}(\mathcal{L})$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de vecteurs de \mathcal{L}

2. Familles génératrices.

Définition et caractérisation

$(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$ une famille de vecteurs de F est génératrice de F lorsque $\text{vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p) = F$.

Si F est un ss-e-v de E alors $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$ est génératrice de F si et seulement si $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \vec{u}_k \in F$ et tout vecteur de F est combinaison linéaire de $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p$.

Opérations

- Le caractère générateur d'une famille ne dépend pas de l'ordre des vecteurs dans cette famille.
- Si l'on ôte à une famille génératrice \mathfrak{G} de F un vecteur qui est combinaison linéaire des vecteurs de \mathfrak{G} alors la famille obtenue est encore génératrice de F . Et plus précisément, $\text{vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p, \vec{u}_{p+1}) = \text{vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p) \Leftrightarrow \vec{u}_{p+1}$ est combinaison linéaire de $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p$.
- Si \mathfrak{G}' est une famille de vecteurs de F qui contient une famille génératrice de F alors \mathfrak{G}' est aussi génératrice de F .
- Les opérations élémentaires sur les vecteurs d'une famille génératrice \mathfrak{G} conserve le caractère générateur de \mathfrak{G} .
- Si $F = \text{vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$ et $G = \text{vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_q)$ alors $F + G = \text{vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_q)$.

3. Base

Définition

Soit E un K -e-v. $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$ est une base de E lorsque \mathcal{B} est génératrice de E et libre.

Caractérisation. Définition des composantes et de la dimension.

\mathcal{B} est une base du K -e-v E si et seulement si tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de \mathcal{B} .

Si $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ est une base du K -e-v E alors $\forall \vec{x} \in E, \exists ! (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in K^n / \vec{x} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \dots + \alpha_n \vec{e}_n$ et $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ sont les

composantes de \vec{x} dans \mathcal{B} . La matrice de \vec{x} dans \mathcal{B} est matrice de $\text{mat}_{\mathcal{B}} \vec{x} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$.

Soit $\mathfrak{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$ une famille de vecteurs de E . $\text{mat}_{\mathcal{B}} \mathfrak{F} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$ où $\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \vec{u}_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} \vec{e}_i$.

Dans un K -e-v E , toutes les bases de E , s'il en existe, ont le même nombre d'éléments (même cardinal).

Ce nombre d'éléments commun à toutes les bases de E est la dimension de E noté $\dim(E)$.

Bases et dimension des K -e-v de référence.

Une droite vectorielle est un e-v de dimension 1. Un plan vectoriel est un e-v de dimension 2.

Si P est le $\mathbb{R} - e - v$ des vecteurs du plan, alors une base de P est formée de 2 vecteurs de P non colinéaires et $\dim_{\mathbb{R}} P = 2$.

Si E est le $\mathbb{R} - e - v$ des vecteurs de l'espace géométrique alors une base de E est formée de trois vecteurs de E non coplanaires et $\dim_{\mathbb{R}} E = 3$.

$\dim_K K = 1$. Base de K : (1) .

$\dim_K K^n = n$. Base canonique de K^n : $((1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 0, 1))$.

$\dim_K M_{n,p}(K) = np$. Base canonique de $M_{n,p}(K) : (E_{ij})_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket \times \llbracket 1,p \rrbracket}$.

Base canonique de $K[X] : (X^k)_{k \in \mathbb{N}}$. $\dim_K K[X] = +\infty$.

$\dim_K K_n[X] = n + 1$. Base canonique de $K_n[X] : (1, X, X^2, \dots, X^n)$. Base de Taylor en α de $K_n[X] : (1, X - \alpha, (X - \alpha)^2, \dots, (X - \alpha)^n)$.

Bases et ss-e-v supplémentaires

Soit F et G deux ss-e-v de E admettant respectivement les bases \mathcal{B}' et \mathcal{B}'' . $F \oplus G = E$ si et seulement si la concaténation de \mathcal{B}' et \mathcal{B}'' est une base de E .

Caractérisation matricielle d'une famille libre-génératrice, d'une base

On suppose que E admet une base finie $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ où $n = \dim(E) \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$ une famille de vecteurs de E où $p = \text{card}(\mathcal{F}) \in \mathbb{N}^*$.

1. \mathcal{F} est libre **si et seulement si** $p = \text{rg}(\text{mat}_{\mathcal{B}} \mathcal{F})$.
2. \mathcal{F} est liée **dès que** $p > n$.
3. \mathcal{F} est génératrice de E **si et seulement si** $n = \text{rg}(\text{mat}_{\mathcal{B}} \mathcal{F})$.
4. \mathcal{F} n'est pas génératrice de E **dès que** $p < n$.
5. \mathcal{F} est une base de E **si et seulement si** $p = n = \text{rg}(\text{mat}_{\mathcal{B}} \mathcal{F})$ **si et seulement si** $\text{mat}_{\mathcal{B}} \mathcal{F}$ est inversible.

(**) Cela pourra faire l'objet d'un exercice de colle.

Questions de cours :

QDC 1 Soit E un K -e-v et $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ des vecteurs de E . Montrer que l'ensemble $\text{vect}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ est un ss-e-v de E .

QDC 2 Démontrer la caractérisation de deux ss-e-v supplémentaires.

QDC 3 \mathcal{B} est une base du K -e-v E si et seulement si tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de \mathcal{B} .