Famille Libre-génératrice-Base. On travaille dans $(E,+,.)$ un $K-e-v$.

Famille libre, famille liée Soit $\mathscr{F}=(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},..,\overrightarrow{u_n})$ une famille de vecteurs de E .

1. $\mathscr{F}$ est **libre lorsque :** la seule manière d'écrire $\overrightarrow{O_E}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},..,\overrightarrow{u_n}$ est l'écriture (ou la combinaison linéaire) dite triviale $\overrightarrow{O_E}=0\overrightarrow{u_1}+0\overrightarrow{u_2}+..+0\overrightarrow{u_n}$; **autrement dit , lorsque** : l'équation $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{u_i}=\vec{O}$ d'inconnue $(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)\in K^n$ admet $(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)=(0,0,\dots,0)$ comme unique solution . On dit aussi que les vecteurs $\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},..,\overrightarrow{u_n}$ sont **linéairement indépendants.**
2. $\mathscr{F}$ est **liée lorsque :** $\mathscr{F}$ n'est pas libre i.e. lorsqu'il existe une écriture non triviale de $\overrightarrow{O_E}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},..,\overrightarrow{u_n}$ i.e. lorsqu'il existe $(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)\neq(0,0,\dots,0)$ tq $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{u_i}=\vec{O}$. On dit que les vecteurs $\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},..,\overrightarrow{u_n}$ sont **linéairement dépendants.** 35

Caractérisation (ou déf. équivalente) : démo

1. La famille $(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},..,\overrightarrow{u_n})$ est liée **sietssi** l'un de ces vecteurs est une combinaison linéaire des autres vecteurs.
2. La famille $(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},..,\overrightarrow{u_n})$ est libre **sietssi** aucun de ses n vecteurs n'est une combinaison linéaire des autres. 36

Conséquences :

1. Une famille contenant le vecteur nul est toujours liée.
2. Une famille dont deux vecteurs sont égaux est liée.
3. $\mathscr{F}=(\vec{u})$ est libre sietssi $\vec{u}\neq\vec{O}$. Par conséquent, tout K –e-v contenant un vecteur non nul contient au moins une famille libre.
4. $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ sont (non) colinéaires **sietssi** la famille $(\vec{u},\vec{v})$ est liée (libre).
5. $\vec{u}$, $\vec{v}$ *et* $\vec{w}$ sont (non) coplanaires **sietssi** $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est liée (libre).
6. Une matrice A carrée d'ordre n est (non) inversible **sietssi** la famille formée par ses n colonnes (resp. lignes) est libre (liée).

Savoir-faire : 1. $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=\cos(2x)\,, g(x)=sin^2(x)\ et\ h(x)=1$. Justifier que la famille (f,g,h) est une famille liée de vecteurs du $\mathbb{R}$-e-v ....

3. Soit E un K –e-v et $\mathscr{L}=(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ une famille libre de vecteurs de E et $\begin{cases}\vec{u}=\vec{\imath}-2\vec{\jmath}-3\vec{k}\\ \vec{v}=-\vec{\imath}-\vec{\jmath}+3\vec{k}\\ \vec{w}=-2\vec{\imath}+\vec{k}\\ \vec{t}=\vec{\imath}+2\vec{\jmath}-\vec{k}\end{cases}$. Etudions la liberté de $\mathscr{F}=(\vec{u},\vec{v},\vec{w},\vec{t})$. 37

Application : Si la famille $(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},..,\overrightarrow{u_n})$ est libre alors toute combinaison linéaire de $\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},..,\overrightarrow{u_n}$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},..,\overrightarrow{u_n}$ ie on peut identifier :

$$\alpha_1\overrightarrow{u_1}+\alpha_2\overrightarrow{u_2}+..+\alpha_n\overrightarrow{u_n}=\beta_1\overrightarrow{u_1}+\beta_2\overrightarrow{u_2}+..+\beta_n\overrightarrow{u_n}\ \underbrace{\Longrightarrow}_{\substack{car\\(\overrightarrow{u_1},..,\overrightarrow{u_n})\\libre.}}\ \alpha_1=\beta_1,\alpha_2=\beta_2,..,\alpha_n=\beta_n.$$

démo 38

Opération sur les familles libres

1) Soit $\mathscr{F}$ une famille libre de vecteurs de E.
(Op1) (Op2) et (Op3) conservent la liberté de $\mathscr{F}$.

(Op1) échanger deux vecteurs de $\mathscr{F}$
(Op2) ajouter à un vecteur de $\mathscr{F}$ un autre vecteur de $\mathscr{F}$ multiplié par un scalaire
(Op3) multiplier un vecteur de $\mathscr{F}$ par un scalaire non nul

2) Toute famille extraite d'une famille libre est libre (Toute famille contenant une famille liée est liée).
3) Si j'ajoute à une famille libre un vecteur qui n'est pas combinaison linéaire des vecteurs déjà présents dans la famille alors la famille obtenue est encore libre. démo 39

NB : Je ne peux pas ajouter n'importe quel vecteur si je veux garder la liberté !!!!

Conséquence : Soit $(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},..,\overrightarrow{u_n})$ une famille **libre** de vecteurs de E et $\vec{u}_{n+1}$ un vecteur de E . Alors $(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},..,\overrightarrow{u_n},\vec{u}_{n+1})$ est libre **sietssi** $\vec{u}_{n+1}$ n'est pas combinaison linéaire de $\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},..,\overrightarrow{u_n}$. démo 40

Familles libres de référence démo

1) Toute famille de polynômes non nuls et tous de degrés différents (famille dite échelonnée en degré) est libre.
2) Toute famille d'éléments de K^n ou de $M_{n,1}(K)$ « échelonnée » et sans vecteur nul est libre. 41

Savoir faire

1. Soit $N\in M_n(K)$ tel que N nilpotente d'indice p . Montrer que $(I,N,N^2,..,N^{p-1})$est libre.
2. Soit $\forall k\in[\![0,n]\!], P_k(X)=X^k(X+1)^{n-k}$. Montrer que $(P_0,P_1,..,P_n)$ est une famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Soit $a_0,..,a_n$ des complexes distincts et $\forall k\in[\![0,n]\!], L_k(X)=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}\frac{1}{a_k-a_j}(X-a_j)$ Montrer que $(L_0,L_1,..,L_n)$ est une famille libre de vecteurs de $\mathbb{C}_n[X]$.
4. Soit $a_0,..,a_n$ des réels distincts $et\ \forall k\in[\![0,n]\!], f_k:(t\mapsto e^{a_kt})$. Montrer que $(f_0,f_1,..,f_n)$ est une famille libre dans $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
5. Soit $a_0,..,a_n$ des réels distincts $et\ \forall k\in[\![0,n]\!], f_k:(t\mapsto|t-a_k|)$. Montrer que $(f_0,f_1,..,f_n)$ est une famille libre dans $C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
6. $\forall k\in[\![0,n]\!], f_k:(t\mapsto\cos^k(t))\ et\ g_k:(t\mapsto cos(kt))$. Montrer que $(f_0,f_1,..,f_n)\ et\ (g_0,g_1,..,g_n)$ sont des familles libres dans $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
7. Soit $b_1,..,b_p$ des nombres complexes distincts $et\ \forall k\in[\![1,p]\!], u_k$ est la suite géométrique de raison b_k et de premier terme 1 . Montrer que $(u_1,..,u_p)$ est une famille libre de vecteurs de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. 42

Famille génératrice: Soit $\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},..,\overrightarrow{u_n}$ des vecteurs de E. $(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},..,\overrightarrow{u_n})$ est une **famille génératrice** de F (ou engendre F) lorsque $F=vect\ (\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},..,\overrightarrow{u_n})$. 43

Caractérisation d'une famille génératrice d'un s-e-v : Soit F un ss-e-v du K-e-v E et $\vec{u}_1,\vec{u}_2,\dots,\vec{u}_p$ des vecteurs de E . démo
La famille $(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\dots,\vec{u}_p)$ est génératrice de F ***si et ssi*** $\vec{u}_1,\vec{u}_2,\dots,\vec{u}_p$ sont dans F et tout vecteur de F est combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}_1,\vec{u}_2,\dots,\vec{u}_p$.

Famille génératrice de $F+G$: Si $F=vect(\vec{f}_1,\dots,\vec{f}_p)$ et $G=vect(\vec{g}_1,\dots,\vec{g}_q)$ alors $F+G=vect(\vec{f}_1,\dots,\vec{f}_p,\vec{g}_1,\dots,\vec{g}_q)$ 44

Opération sur les familles génératrices

1) Soit $\mathscr{F}$ une famille génératrice de E. (Op1) (Op2) et (Op3) conservent le caractère générateur de $\mathscr{F}$ 45
2) Toute famille de vecteurs de E contenant une famille génératrice de E est génératrice de E.
3) Si j'ôte à une famille génératrice de E un vecteur qui est combinaison linéaire des autres, la famille obtenue est encore génératrice de E . démo 45

NB Je ne peux pas ôter n'importe quel vecteur si je souhaite garder la genèse !!!!

Conséquence : $vect(\vec{f}_1,\dots,\vec{f}_p)=vect(\vec{f}_1,\dots,\vec{f}_p,\vec{f}_{p+1})$ **sietssi** $\vec{f}_{p+1}$ est combinaison linéaire de $\vec{f}_1,\dots,\vec{f}_p$. démo 46

Exemples de référence :

- (1) est génératrice de K .
- $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est génératrice de $K[X]$ et $(X^k)_{k\in[\![0,m]\!]}$ est génératrice de $K_m[X]$.
- Pour tout scalaire a, $((X-a)^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est génératrice de $K[X]$ et $((X-a)^k)_{k\in[\![0,m]\!]}$ est génératrice de $K_m[X]$.
- $(E_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ est génératrice de $M_{n,p}(K)$. 47

Base Une famille de vecteurs est une **base** du $K-e-v\ E$ lorsque cette famille est une famille de vecteurs de E, libre et génératrice de E .
NB : cette définition s'applique au ss-e-v puisqu'un ss-e-v est un e-v. 48

Caractérisation d'une base démo
$(\overrightarrow{u_\imath})_{i\in I}$ est une base du K-e-v E **si et seulement si** $\forall i\in I,\overrightarrow{u_\imath}\in E$ et tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},..,\overrightarrow{u_n}$.
L'existence de l'écriture comme c.l. est donnée par le caractère générateur.
L'unicité est donnée par la liberté ; 49
NB : lorsque E peut être un $\mathbb{R}$-e-v et un $\mathbb{C}$-e-v, on précisera s'il s'agit $\mathbb{R}$-base ou sur le $\mathbb{C}$-e-v appelée $\mathbb{C}$-base.

Composante-Matrice d'une famille dans une base
Lorsque $\mathfrak{B}=(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},..,\overrightarrow{e_n})$ est une base du $K-e-v\ E$ alors $\forall\vec{x}\in E,\exists!\underbrace{(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)}_{dépendente\ \vec{x}}\in K^n/\vec{x}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{e_\imath}$.
$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ sont les **composantes** de $\vec{x}$ dans la base $\mathfrak{B}$ et pour chaque $k\in[\![1,n]\!]$, α_k est sa **composante** selon $\vec{e_k}$.
$(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$ est le n-uplet des **composantes** de $\vec{x}$ dans $\mathfrak{B}$.

$$mat_{\mathfrak{B}}\vec{x}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$$. est la matrice de $\vec{x}$ dans $\mathfrak{B}$.

Soit $\mathscr{F}=(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},..,\overrightarrow{u_p})$ une famille de vecteurs de E .

composantes de $\overrightarrow{u_1}$ $\overrightarrow{u_2}$ $\overrightarrow{u_p}$ selon

$$mat_{\mathfrak{B}}\mathfrak{F}=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&&a_{1p}\\ a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2p}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ a_{n1}&a_{n2}&&a_{np}\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{c}\overrightarrow{e_1}\\ \overrightarrow{e_2}\\ \vdots\\ \overrightarrow{e_n}\end{array}$$ où $\forall j\in[\![1,p]\!],\overrightarrow{u_\jmath}=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\overrightarrow{e_\imath}$

$\forall i\in[\![1,n]\!],\forall j\in[\![1,p]\!], a_{ij}$ *est la composante de* $\overrightarrow{u_\jmath}$ *selon* $\overrightarrow{e_\imath}$. 50

Exemples de référence : *démo*

- Tout vecteur $\vec{u}$ non nul d'une droite vectorielle constitue une base de cette droite.
- Deux vecteurs d'un plan vectoriel P non colinéaires forment une base de P.
- Trois vecteurs de l'espace géométrique E non coplanaires forment une base de l'espace géométrique E .
- (1) est une $\mathbb{R}$- base de $\mathbb{R}$. (1) est une $\mathbb{C}$- base de $\mathbb{C}$.
- $(1, i)$ est une $\mathbb{R}$- base de $\mathbb{C}$.
- $\mathscr{B}_c = \big((1,0,\dots,0),(0,1,0,..,0),\dots,(0,\dots,0,1)\big)$est une base de K^n appelée base canonique.
- Dans $\mathcal{M}_{np}(K)$, notons E_{ij} la matrice de type (n,p) dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient ligne i et colonne j qui vaut 1. La famille $\left(E_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$est une base de$\mathcal{M}_{np}(K)$. appelée base canonique.
- Soit n un entier naturel. la famille $(1, X, X^2,\dots,X^n)$est la base canonique de $K_n[X]$. Soit a un scalaire. La famille $(1, X-a,(X-a)^2,\dots,(X-a)^n)$ est la base de taylor de $K_n[X]$ en a et les composantes d' un polynôme P de $K_n[X]$ dans cette base de Taylor sont $\left(\frac{P^{(0)}(a)}{0!},\frac{P^{(1)}(a)}{1!},\frac{P^{(2)}(a)}{2!},\dots,\frac{P^{(n)}(a)}{n!}\right)$(pour $a=0$ on retrouve la base canonique). La famille $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est la base canonique de $K[X]$ et $((X-a)^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est la base Taylor en a de $K[X]$.
- Posons $f_n\colon (x\mapsto x^n)$. Alors la famille $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de l'ensemble des fonctions polynomiales réelles. 51

Car toute fonction polynomiale s'écrit de manière unique come $c.l.$ des fonctions f_n tq $n\in\mathbb{N}$.

<u>D'autres exemples déjà rencontrés.</u>

- L'ensemble S des solutions de l'équa. diff. $y'+a(x)y=0$ $où\ a\ continue\ sur\ I$ a pour base (f_0) où f_0: $\left(x\to e^{-A(x)}\right)$ tq A primitive de a sur I .

car (f_0) est génératrice de S et libre car constituée d'un seul vecteur non nul.

- Soit a , b des réels. L'ensemble S des solutions de l'équa. diff $y''+ay'+by=0$ est un espace vectoriel de base (f_1,f_2) où

$f_1\colon(x\to e^{r_1x})et\ \ f_2\colon(x\to e^{r_2x})$ avec $r_1\ et\ r_2$ sol° de $(e.c)$ si $\Delta>0$
$f_1\colon(x\to e^{r_0x})et\ \ f_2\colon(x\to xe^{r_0x})$ avec r_0 sol° de $(e.c)$ si $\Delta=0$
$f_1\colon(x\to\cos(\omega x)e^{\rho x})et\ \ f_2\colon(x\to\sin(\omega x)e^{\rho x})$ avec $r_1=\rho+i\omega\ et\ \overline{r_1}$ sol° de $(e.c)$ si $\Delta<0$

car (f_1,f_2) est génératrice de S et libre. En effet, les deux fonctions ne sont pas colinéaires.

- Soit r cpxe non nul fixé. $((r^n)_{n\in\mathbb{N}})$ est une base de la droite vectorielle des suites cpxes géométriques de raison r.
- $((1)_{n\in\mathbb{N}},(n)_{n\in\mathbb{N}})$ est une K- base de l'ensemble des suites arithmétiques d'éléments de K.

- Soit a , b des réels. L'ensemble S des suites u vérifiant : $\forall n, u_{n+2}+au_{n+1}+bu_n=0$ est un plan vectoriel de base (u,v) où

$u=(r_1{}^n)_{n\in\mathbb{N}}\ et\ v=(r_2{}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $r_1\ et\ r_2$ sol° de $(e.c)$ si $\Delta>0$
$u=(r_1{}^n)_{n\in\mathbb{N}}\ et\ v=(nr_1{}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec r_0 sol° de $(e.c)$ si $\Delta=0$
$u=(\cos(n\theta)r^n)_{n\in\mathbb{N}}\ et\ v=(\sin(n\theta)r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $r_1=re^{i\theta}$ $(r\neq0\ et\ \theta\not\equiv0[\pi])\ et\ \overline{r_1}$ sol° de $(e.c)$ si $\Delta<0$

car (u,v) est génératrice de S et vérifions que (u,v) est libre. Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$tq : $au+bv=0$.
Alors $\forall n\in\mathbb{N}, au_n+bv_n=0$ i.e. $\forall n\in\mathbb{N}, a\cos(n\theta)r^n+b\sin(n\theta)r^n=0$. Comme $r^n\neq0$, $on\ a$: $\forall n\in\mathbb{N}, a\cos(n\theta)+b\sin(n\theta)=0$. En particulier, pour $n=0$, on obtient $a=0$ et par conséquent, $\forall n\in\mathbb{N}, b\sin(n\theta)=0$. En particulier pour $n=1$, $b\sin(\theta)=0$.Or, $\theta\not\equiv0[\pi]$, $\sin(\theta)\neq0$. Donc $b=0$. J'en déduis que $0u+0v=0$ est la seule manière d'écrire la suite nulle comme $c.l.$ de $u\ et\ v$.

- Soit $p\in\mathbb{N}^*$. L'ensemble des suites u périodiques de période p fixée admet pour base la famille $\left(u^{(0)},u^{(1)},..,u^{(p-1)}\right)$ où $\forall k\in[\![0,p-1]\!], u^{(k)}=$
$\big(\underbrace{0}_{rang\,0},..,0,\underbrace{1}_{rang\,k},0,\dots\dots.0,\underbrace{1}_{rang\,k+p},0,\dots..,0,\underbrace{1}_{rang\,k+2p},0,\dots.\big)$

Car Soit v une suite p-périodique. $v=\lambda_0u^{(0)}+\lambda_1u^{(1)}+..+\lambda_{p-1}u^{(p-1)}\Leftrightarrow v=(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,..,\lambda_{p-1},\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,..,\lambda_{p-1},\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\dots)\Leftrightarrow\lambda_0=v_0,\lambda_1=v_1,..,\lambda_{p-1}=v_{p-1}$. Donc toute suite p-périodique s'écrit de manière unique comme $c.l.$ de $u^{(0)},u^{(1)},\dots u^{(p-1)}$. 52

En pratique :

1) Pour montrer qu'une famille $(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},..,\overrightarrow{u_n})$ est libre, je vais considérer des scalaires $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ tels que : $\sum_{i=1}^n\alpha_i\overrightarrow{u_i}=\vec{0}$. Et par déduction, je vais montrer que ces scalaires sont nécessairement nuls.
2) Pour étudier la liberté d'une famille de vecteurs ou pour trouver toutes les relations de dépendance linéaire entre les vecteurs de la famille, je vais
a) Regarder s' il existe une relation de dépendance linéaire évidente entre les vecteurs de cette famille.
b) Résoudre l'équation $\sum_{i=1}^n\alpha_i\overrightarrow{u_i}=\vec{0}$ d'inconnue $(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)\in K^n$. Les solutions de cette équation sont
soit uniquement $(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)=(0,0,\dots,0)$ ce qui signifie que la famille étudiée est libre.
soit d'autres solutions apparaissent ce qui signifie que la famille étudiée est liée et les solutions me donnent toutes les relations de dépendance linéaire entre les vecteurs de la famille, c'est-à-dire toutes les manières d'écrire certains vecteurs comme combinaison linéaire d'autres.

3) Pour prouver que F est un ss-e-v de E et en trouver une famille génératrice. On a alors deux possibilités :
a) Le « tout en un » : montrer directement que $F=vect\ (\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},..,\overrightarrow{u_n})$ avec $\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},..,\overrightarrow{u_n}$ des vecteurs de E. Alors on peut conclure que F est un ss-e-v de E et $(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},..,\overrightarrow{u_n})$ est une famille génératrice de F.
b) En deux temps : montrer que F est un ss-e-v de E puis prouver que chaque vecteur de F est une combinaison linéaire de vecteurs de $\boldsymbol{F}$: $\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},..,\overrightarrow{u_n}$, connus et fixés.

4) Pour trouver une base d'un K-e-v E, une méthode consiste
1)à trouver une famille génératrice de cet espace.
2) d'étudier toutes les relations de dépendance linéaire entre les vecteurs de cette famille.
3) d'éliminer les vecteurs qui s'écrivent comme combinaison linéaire des autres.
Ainsi, je conserve le caractère générateur de ma famille et je gagne de la liberté !! 53

Exercice 1 :

1. Déterminer une base de F=$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/\ 2x-3y+4z=0\}$.
2. $F=\{P\in\mathbb{R}_n[X]/(X^2-1)P''-2XP'=0\}$. Déterminons une base de F.
3. Déterminer une base de $F=vect((f_k)_{k=0..6})$ où $f_0=1, f_1:(x\to cosx), f_2:(x\to sinx), f_3:(x\to cos^2x), f_4:(x\to sin^2x), f_5:(x\to\cos(2x))$, $f_6:(x\to sin2x)$.

Caractérisation par les bases de sous-e-v supplémentaires

Soit F et G deux ss-e-v de E tels que F admette une base $\mathfrak{B}'=\left(\overrightarrow{f_1},\overrightarrow{f_2},..,\overrightarrow{f_p}\right)\ et\ G$ admette une base $\mathfrak{B}''=\left(\overrightarrow{g_1},\overrightarrow{g_2},..,\overrightarrow{g_q}\right).Alors,$
$E=F\oplus G$ **<u>sietssi</u>** $\underbrace{\left(\overrightarrow{f_1},\overrightarrow{f_2},..,\overrightarrow{f_p},\overrightarrow{g_1},\overrightarrow{g_2},..,\overrightarrow{g_q}\right)}_{\substack{concaténation\\ d'une\ base\ de\ F\ et\\ d'une\ base\ de\ G}}$est une base de E. 54

Le <u>chapitre suivant</u> donnera aussi les propriétés et les caractérisations suivantes que vous pouvez déjà utiliser :

Dimension d'une espace vectoriel 55

Si E admet une $K-$ base finie, alors toutes les $K-$bases de E ont le même nombre d'éléments (le même cardinal) et ce nombre commun d'éléments est, par définition, la dimension de E :

$dim_K(E)=dim(E)=card(\mathfrak{B})$ où $\mathfrak{B}$ base quelconque de E.

Exemples de référence :

- $dim_{\mathbb{R}}(D)=1, dim_{\mathbb{R}}(P)=2,\ dim_{\mathbb{R}}(E)=3$
- $dim_K\mathcal{M}_{np}(K)=np$
- $dim_KK^n=n$
- $dim_KK_n[X]=n+1$
- Si E admet une $\mathbb{C}-$ base finie, alors $dim_{\mathbb{R}}E=\ 2dim_{\mathbb{C}}E$.

Caractérisation matricielle d'une famille libre-génératrice - base 56

Supposons que E admette une base $\mathfrak{B}$ i.e. $\dim E=n$.
Soit $\mathscr{F}=(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},..,\overrightarrow{u_p})$ une famille de vecteurs de E .

1. $\mathscr{F}$ est libre **<u>sietssi</u>** $p=rg\ (mat_{\mathfrak{B}}\mathfrak{F})$.
2. $\mathscr{F}$ est liée **<u>dès que</u>** $p>n$.
3. $\mathscr{F}$ est génératrice de E **<u>sietssi</u>** $n=rg\ (mat_{\mathfrak{B}}\mathfrak{F})$.
4. $\mathscr{F}$ n' est pas génératrice de E **<u>dès que</u>** $p<n$.
5. $\mathscr{F}$ est une base de E **<u>sietssi</u>** $p=n=rg\ (mat_{\mathfrak{B}}\mathfrak{F})$
<u>sietssi</u> $mat_{\mathfrak{B}}\mathfrak{F}$ est inversible.

Lorsque $\mathfrak{B}$ et $\mathscr{F}$ sont deux bases finies de E, $mat_{\mathfrak{F}}\mathfrak{B}=(mat_{\mathfrak{B}}\mathfrak{F})^{-1}$.

Exercice 2 : Soit $A=\begin{pmatrix}-5&-3&6\\0&-2&0\\-3&-3&4\end{pmatrix}$.

a. Montrer que le système (S_λ): $AX=\lambda X$est de Cramer sietssi $\lambda\notin\{-2,1\}$.
b. Soit $H=Sol((S_1)\ et\ K=Sol((S_{-2})$. Montrer que $H\oplus K=M_{3,1}(\mathbb{R})$.

Exercice 3 :

1. $M_1=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$, $M_2=\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ et $M_3=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. Montrons que (M_1,M_2) est une base de $\mathcal{M}_{21}(\mathbb{R})$ et déterminons les composantes de M_3 dans cette base.
2. Soit $P=1+X-3X^2, Q=1+4X-3X^2, R=-3+4X+X^2$ et $S=-2+5X+2X^2$.
a) Pourquoi (P,Q,R,S) est liée ?
b) Montrer que (P,Q,R,S) est génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$.
c) Extraire de la famille (P,Q,R,S) une base de $\mathbb{R}_2[X]$.