Sous – espace - vectoriel (ss-e-v) Soit $(E,+,.)$ un espace vectoriel sur K et F un ensemble.
F est un **sous – espace - vectoriel** (ss-e-v) de E lorsque :
$D1)\ F \subset E$
$D2)\ \overrightarrow{O_E} \in F$ ou F non vide.
$D3)\ \forall(\vec{x},\vec{y}) \in F^2,\ \vec{x}+\vec{y} \in F$ et $\forall \vec{x} \in F, \forall \alpha \in K,\ \alpha.\vec{x} \in F$. ($F$ est stable par addition et multiplication externe) ou $\forall(\vec{x},\vec{y}) \in F^2, \forall(\alpha,\beta) \in K^2,\ \alpha\vec{x}+\beta\vec{y} \in F$ (on dit que F est stable par $c.l$). 12

Exemples : E et $\{\overrightarrow{O_E}\}$ sont des sous-espaces-vectoriels de E.

Savoir-faire : Montrer que $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \underbrace{5x - 3y + 7z = 0}_{\text{équation cartésienne de } F}\}$ est un ss-e-v de $\mathbb{R}^3$.

Tout ss-e-v F est stable par combinaisons linéaires. Tout ss-e-v d'un K-e-v est lui-meme un K –e-v.
Si G et F sont deux ss-e-v de E et $G \subset F$ alors G est un ss-e-v de F.
$\{\overrightarrow{O_E}\}$ est le seul espace vectoriel contenant un seul vecteur . Tout e-v contenant un vecteur non nul contient une infinité de vecteurs. 13

En pratique : lorsqu'il faut prouver qu'un ensemble F est un K-e-v , il suffit donc de montrer que F est un ss-e-v d'un e-v de référence . Construire un ss-e-v est une manière de construire un e-v.

Des ss-e-v = nouveaux e-v- de référence.

1. $S_n(K)$ et $A_n(K)$ sont des ss-e-v de $M_n(K)$. L'ensembles des matrices de $M_n(K)$ diagonales (resp triangulières sup , resp. inf) est un ss-e-v de $M_n(K)$.
2. $K_m[X]$ est un ss-e-v de $K[X]$ où $m \in \mathbb{N}$ fixé.
3. Soit $k \in \mathbb{N}$. $D^k(I,\mathbb{R})$ (resp . $C^k(I,\mathbb{R})$ou $C^\infty(I,\mathbb{R})$) est un ss-e-v de $\mathscr{F}(I,\mathbb{R})$. 14

Espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs

1. Soient $\vec{u}_1,\vec{u}_2,\dots,\vec{u}_p$ des vecteurs du K-e-v E.
L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{u}_1,\vec{u}_2,\dots,\vec{u}_p$ est un ss-e-v de E appelé le sous **espace vectoriel engendré par** la famille $(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\dots,\vec{u}_p)$ et noté $vect(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\dots,\vec{u}_p)$.
$vect(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\dots,\vec{u}_p)$ est un ss-e-v de E.
Si ambiguïté, on note $vect_{\mathbb{R}}(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\dots,\vec{u}_p)$ ou $vect_{\mathbb{C}}(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\dots,\vec{u}_p)$. .
2. **Généralisation :** Soit X un sous-ensemble ou une famille de vecteurs de E. L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des éléments de X est un ss-e-v de E appelé le sous-espace-vectoriel engendré par X et noté $vect(X)$. 15

Deux cas particuliers : Le sous-e-v engendré par un seul vecteur $\vec{u}$ non nul est appelé la **droite vectorielle** engendrée par $\vec{u}$. Le sous-e-v engendré par deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires est appelé le **plan vectoriel** engendré par la famille $(\vec{u},\vec{v})$. 16

Rque :

- Si $T \subset S \subset E$ alors $vect(T) \subset vect(S)$.
- Si F est un ss-e-v de E alors $F = vect(F)$.
- $vect(X)$ est inclus dans tout ss-e-v de E contenant tous les vecteurs de X . **En particulier,** si $\vec{a}$ est un vecteur non nul d'un ss-e-v G alors la droite engendré(e) par $\vec{a}$ est inclus dans G. si $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont deux vecteurs non colinéaires d'un ss-e-v G alors le plan engendré par $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est inclus dans G. 17

Savoir-faire Compléter :

- $\{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 / 3ix - (2+i)y + 5z = 0\} = vect_{\mathbb{C}}(\dots\dots)$.
- $\left\{(x,y,z,t,w) \in \mathbb{R}^5 / \begin{cases} 3x - 4y + 5z + 2t - w = 0 \\ 2x + 3y - z + 5t + 2w = 0 \end{cases}\right\} = vect_{\mathbb{R}}(\dots\dots)$.
- Soit F l'ensemble des suites réelles u tq $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + 2u_{n+1} + 2u_n = 0$. F=$vect(\dots\dots)$.
- Soit F l'ensemble des suites réelles périodiques de période 4. $F = vect(\dots\dots)$.
- Soit F l'ensemble des suites arithmétiques . F=$vect(\dots\dots)$
- Soit (EH): $xy'(x) + \ln(x)\,y(x) = 0$. Alors, $Sol(EH) = vect(\dots\dots)$.
- Soit (EH) : $y''(x) + 2y'(x) + 2y(x) = 0$. $Sol(EH) = vect(\dots\dots..)$
- $F = \left\{\begin{pmatrix} c-a & 0 \\ a-b+2c & 3a+b \\ 3c & c+a \end{pmatrix} / a,b,c \in \mathbb{R}\right\} = vect(\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots)$.
- $F = \{b - a - 2bX + (a+b)X^2 / a,b \in \mathbb{R}\} = vect(\dots\dots)$.
- $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1\}$. $vect(T)$ =..... 18

Conséquence : Soit $\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_p$ vecteurs de E et G ss-e-v de E.
$vect(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\dots,\vec{u}_p)$ est un ss-e-v de $G \iff \forall k \in [\![1,p]\!], \vec{u}_k \in G$. 19

Savoir-faire : Soit P=$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 3x + 2y + 5z = 0\}$. Montrons que P est un plan vectoriel puis ;que $P = vect((1,1,-1),(-2,-7,4))$. 20

Famille génératrice Lorsque $F = vect((\vec{u}_i)_{i\in I})$, on dit que la **famille** $(\vec{u}_i)_{i\in I}$ **engendre** ou est une **famille génératrice** de F.
NB : Les vecteurs générateurs de F sont des éléments de F. 21

Caractérisation d'une famille génératrice d'un ss-e-v :
Soit Fun ss-e-v de E et $X = (\vec{u}_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E.
$(\vec{u}_i)_{i\in I}$ est génératrice de F **sietssi** $\forall i \in I$, $\vec{u}_i \in F$ et tout vecteur de F est une combinaison linéaire des vecteurs de $(\vec{u}_i)_{i\in I}$. 22

Exemples de référence :

- (1) est génératrice de K .
- $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est génératrice de $K[X]$ et $(X^k)_{k\in[\![0,m]\!]}$ est génératrice de $K_m[X]$.
- Pour tout scalaire a, $((X-a)^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est génératrice de $K[X]$ et $((X-a)^k)_{k\in[\![0,m]\!]}$ est génératrice de $K_m[X]$.
- $(E_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$est génératrice de $M_{n,p}(K)$. 23

Intersection quelconque de ss-e-v : Soit $(F_i)_{i\in I}$une famille de sous-espaces-vectoriels d'un K-e-v E. Alors $\bigcap_{i\in I} F_i$, l'intersection de tous les F_i, est un sous espace vectoriel de E. 24

Caractérisation d'un ss-e-v engendré: Soit X une famille de vecteurs de E. $vect(X)$ est le plus petit (au sens de l'inclusion) sous-espace-vectoriel de E contenant les vecteurs de X. $vect(X)$ est l'intersection de tous les ss-e-v de E contenant les vecteurs de X. 25

Somme de deux ss-e-v : Soient F et G deux sous espaces vectoriels de E . L'ensemble
$F + G = \{\vec{x}+\vec{y} / \vec{x} \in F$ et $\vec{y} \in G\}$ est un sous espace vectoriel de E appelé sous espace somme de F et G . 26

NB : La réunion de deux ss-e-v de E n'est pas un ss-e-v de E .
Contre-exemple : prenons $E = \mathbb{R}^2$, $F = vect((1,0))$ et $G = vect((0,1))$. Alors $F \cup G = \{(x,0);(0,y)/(x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x = 0$ ou $y = 0\}$ n'est pas stable par addition car $\underbrace{(1,0)}_{\in F\cup G} + \underbrace{(0,1)}_{\in F\cup G} = \underbrace{(1,1)}_{\notin F\cup G}$ donc n'est pas un ss-e-v de $\mathbb{R}^2$.

Ss-e-v engendré par un union Si F et G sont des ss-e-v de E alors F et G sont des ss-e-v de $F+G$ et $F + G = vect(F \cup G)$. 27

Famille génératrice d'un sous-espace somme
Si $F = vect(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\dots,\vec{u}_p)$ et $G = vect(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_q)$ alors
$F + G = vect(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\dots,\vec{u}_p, \vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_q)$. 28

Somme directe Soient F et G deux ss-e-v d'un K-e-v E .
F et G sont **en somme directe** lorsque $F \cap G = \{\vec{O}\}$. 29

Caractérisation d'une somme directe Les deux sous espaces vectoriels F et G de E sont en somme directe **sietssi** tout vecteur de $F+G$ s'écrit de manière unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G. 30

Sous-espace supplémentaires. Les ss-e-v F et G de E sont **supplémentaires dans E** lorsque $\begin{cases} F + G = E \\ F \cap G = \{\vec{O}\} \end{cases}$
Notation $F \oplus G = E$; 31

Caractérisation de sous-espaces supplémentaires : Les deux sous espaces vectoriels F et G de E sont supplémentaires dans E **sietssi** tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G .
sietssi $\forall \vec{u} \in E, \exists!\, \vec{x} \in F, \exists!\, \vec{y} \in F / \vec{u} = \vec{x} + \vec{y}$.
NB : $\vec{x},\vec{y}$ dépendent de $\vec{u}$. 32

Exemples déjà rencontrés

1. $S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$ =$M_n(\mathbb{R})$
2. Dans $E = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, le ss-e-v des fonctions paires et celui des fonctions impaires sont supplémentaires.
3. Soit $Q \in K[X]$ tq deg $(Q) = p \in \mathbb{N}$ et F est l'ensemble des polynômes divisibles par Q. Alors, $K_p[X] \oplus F$ =$K[X]$. 33

Savoir-faire : 1. Soit F=$\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / 3x + z - t = 0$ et $x = 2y\}$ et $G = \{(a,b,2a-b,a+b)/a,b$ réels$\}$. Monter que F et G sont deux ss-e-v de supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.
2. Soit F=$\{f \in C^1([0,1],\mathbb{R}) / f(0) = f'(0) = 0\}$ et $G = \{(x \mapsto ax + b)/a,b$ réels$\}$.
Monter que F et G sont deux ss-e-v de supplémentaires dans $C^1([0,1],\mathbb{R})$. 34

Ex1 Soit a un réel. Montrer que :
$F = \left\{f \in C^0([0,1],\mathbb{R}) / \int_0^1 f = a\right\}$ est un ss-e-v de $C^0([0,1],\mathbb{R})$ sietssi $a = 0$.
$F = \{P \in K[X] / P'(1) + a = 2P(0) + P''(2)\}$ est un ss-e-v de $K[X]$ sietssi $a = 0$.

Ex2 F est-il un ss-e-v d'un e-v de référence ?

- $F = GL_n(K)$
- F est l' ensemble des fonctions bijectives de K sur K .
- F est l'ensemble des suites réelles négligeables devant $\sqrt{n}$.
- F est l'ensemble des fonctions de [0,1] dans $\mathbb{R}$ monotones (sur [0,1]).
- F est l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ périodiques de période commune T où T réel strictement positif fixé.
- F est l'ensemble des suites complexes périodiques.
- F est l'ensemble des vecteurs du plan de norme inférieure à 1.
- F est l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de limite finie en $+\infty$.
- F est l'ensemble des suites bornées
- F est l'ensemble des suites réelles convergentes.
- F est l'ensemble des exponentielles imaginaires.

Ex3 Justifier que F est un ss-e-v d'un K-e-v de référence et en déterminer une famille génératrice.

1. $F = \{(x \mapsto \tilde{P}(x)\cos(x) + \tilde{Q}(x)\sin(x)/P,Q \in \mathbb{R}_1[X]\}$
2. $F = \{(x_1,x_2,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n / \sum_{k=1}^n kx_k = \sum_{k=1}^n x_k\}$
3. $F = \{M \in M_2(\mathbb{R}) / AM = MA\}$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$
4. $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] / P(1) + 2P'(1) = 0\}$.
5. F est l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ qui vérifie $P(X+1) = P(X)$

Ex4 1. Soit E l'ensemble des suites réelles 3-périodiques et F l'ensemble des suites réelles dont l termes de rang 0, 1 et 2 sont nuls. Montrer que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = F \oplus E$.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} -5 & -3 & 6 \\ 0 & -2 & 0 \\ -3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

a. Montrer que le système (S_λ): $AX = \lambda X$est de Cramer sietssi $\lambda \notin \{-2,1\}$.
b. Soit $H = Sol((S_1)$ et $K = Sol((S_{-2})$. Montrer que $H \oplus K = M_{3,1}(\mathbb{R})$.