

ESPACES VECTORIELS

K désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} et n et p désignent des entiers naturels non nuls et m un entier naturel non nul.

Rappel :

- 1) deux fonctions sont égales si et seulement si elles ont le même domaine de définition et associent la même image à chaque élément de ce domaine de définition.
- 2) un ensemble F est inclus dans un ensemble E lorsque $\forall x \in F, x \in E$.
- 3) deux ensembles sont égaux si et seulement si ils contiennent exactement les mêmes éléments si et seulement si tout élément de l'un est élément de l'autre et réciproquement (i.e. l'un est inclus dans l'autre et l'autre est inclus dans l'un-double inclusion).

Espace vectoriel : Un **espace vectoriel sur K** (ou un K -e-v) est un ensemble non vide E muni de deux lois (opérations) :

(+) **addition interne** et (.) multiplication par un scalaire appelée aussi **multiplication externe**, qui vérifient :

P1 $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, \vec{x} + \vec{y} \in E$ et $\forall \vec{x} \in E, \forall \alpha \in K, \alpha \cdot \vec{x} \in E$ (E est stable par addition interne et multiplication externe).

P2 $\forall (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \in E^3, (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$ et $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$ ((+) est ASSOCIATIVE et COMMUTATIVE)

P3 (+) a un élément NEUTRE noté $\vec{0}_E$ ou $\vec{0}$ qui vérifie : $\forall \vec{x} \in E, \vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$.

P4 Tout élément \vec{x} de E a un unique SYMETRIQUE pour (+) . $\forall \vec{x} \in E, \exists ! \vec{y} \in E / \vec{x} + \vec{y} = \vec{0}$. Alors, \vec{y} est noté $-\vec{x}$ et appelé l'opposé de \vec{x} . $\vec{x} + (-\vec{y})$ est noté $\vec{x} - \vec{y}$.

la somme de \vec{x} et de l'opposé de \vec{y}

P5 $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, \forall (\alpha, \beta) \in K^2, \alpha \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \alpha \cdot \vec{x} + \alpha \cdot \vec{y}$ et $(\alpha + \beta) \cdot \vec{x} = \alpha \cdot \vec{x} + \beta \cdot \vec{x}$ ((.) est distributive sur (+))

P6 $\forall \vec{x} \in E, \forall (\alpha, \beta) \in K^2, \alpha \cdot (\beta \cdot \vec{x}) = (\alpha \beta) \cdot \vec{x} = \beta \cdot (\alpha \cdot \vec{x})$ (associativité mixte)

P7 $\forall \vec{x} \in E, 1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$ (1 élément neutre pour (.))

Les éléments de E sont appelés des **vecteurs**, $\vec{0}_E$ ou $\vec{0}$ est le vecteur nul de E . Les éléments de K sont des **scalaires**.

NB : En maths, un vecteur peut être une matrice, un polynôme, une fonction, une suite, un vecteur du plan ou de l'espace... Cf espaces vectoriels de référence

Combinaison linéaire Soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ des scalaires, $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p$ des vecteurs d'un K -e-v E . Alors $\sum_{k=1}^p \alpha_k \vec{u}_k = \alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \dots + \alpha_p \vec{u}_p \in E$, $\sum_{k=1}^p \alpha_k \vec{u}_k$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p$.

Soit X un ensemble de vecteurs de E . Une **combinaison linéaire de vecteurs de X** est tout vecteur de la forme $\sum_{k=1}^q \alpha_k \vec{x}_k$ où $q \in \mathbb{N}^*$ et $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_q$ sont des vecteurs de X .

Rq : une combinaison linéaire est une somme finie. Le vecteur nul est combinaison linéaire de toute famille de vecteurs car $\vec{0} = \sum_{k=1}^p 0 \cdot \vec{u}_k$. Deux vecteurs sont colinéaires si l'un est combinaison linéaire de l'autre.

Règles de calcul : Soit α, β des scalaires et \vec{x}, \vec{y} des vecteurs de E .

C1 $\alpha \cdot \vec{x} = \vec{0}$ si et seulement si $\alpha = 0$ ou $\vec{x} = \vec{0}$

C2 $-(\alpha \cdot \vec{x}) = (-\alpha) \cdot \vec{x} = \alpha \cdot (-\vec{x})$ (**NB :** $\vec{x} + (-\alpha \vec{y})$ est noté $\vec{x} - \alpha \vec{y}$)

C3 $(\alpha - \beta) \cdot \vec{x} = \alpha \vec{x} - \beta \vec{x}$ et $\alpha \cdot (\vec{x} - \vec{y}) = \alpha \vec{x} - \alpha \vec{y}$.

Généralisation de P2... 7 : Soit $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p$ des vecteurs d'un K -e-v E et $\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_p$ des éléments de K .

1. $\sum_{k=1}^p \vec{u}_k = \sum_{k=1}^r \vec{u}_k + \sum_{k=r+1}^p \vec{u}_k$ où $r \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$.

2. $\sum_{k=1}^p \vec{u}_k = \sum_{i=0}^{p-1} \vec{u}_{p-i}$

3. $\sum_{k=1}^p (\sum_{j=1}^n \vec{u}_{kj}) = \sum_{j=1}^n (\sum_{k=1}^p \vec{u}_{kj})$

4. $\sum_{k=1}^p \alpha_k \vec{x} = (\sum_{k=1}^p \alpha_k) \vec{x}$

5. $\alpha \sum_{k=1}^p \vec{u}_k = \sum_{k=1}^p \alpha \vec{u}_k$

Espace de fonctions : Soit $(E, +, \cdot)$ un K -e-v et T un ensemble quelconque.

On note $\mathcal{F}(T, E)$ l'ensemble des applications de T dans E . On définit deux opérations sur $\mathcal{F}(T, E)$ une addition (+) et une multiplication externe (.) par : $\forall (f, g) \in \mathcal{F}(T, E)^2, \forall \alpha \in K,$

$$f + g : (t \mapsto f(t) + g(t)) \quad \text{et} \quad \alpha \cdot f : (t \mapsto \alpha \cdot f(t)).$$

Alors $\mathcal{F}(T, E)$ muni de ces deux opérations (+) et (.), est un K -e-v.

Espace produit : Soit $(E, +, \cdot)$ et $(F, +, \cdot)$ deux K -e-v.

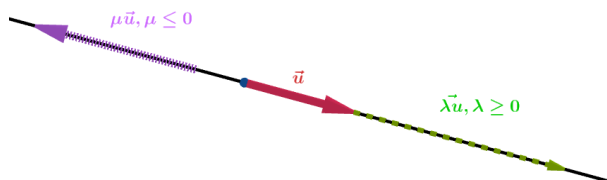
On note $E \times F = \{(x, y) / x \in E \text{ et } y \in F\}$ et on définit deux opérations sur $E \times F$ une addition (+) et une multiplication externe (.) par : $\forall X = (x_1, x_2) \in (E \times F), \forall Y = (y_1, y_2) \in (E \times F)$ et $\forall \alpha \in K,$

$$X + Y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \quad \text{et} \quad \alpha \cdot X = (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot x_2)$$

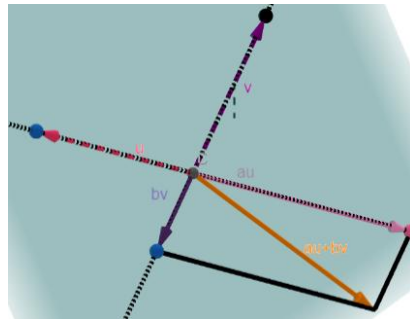
Alors $E \times F$, muni de ces deux opérations (+) et (.), est un K -e-v.

Tout espace vectoriel contient toutes les combinaisons linéaires de ses éléments, toutes les sommes (finies) de ses éléments et tous ses vecteurs multipliés par un scalaire. Autrement dit,

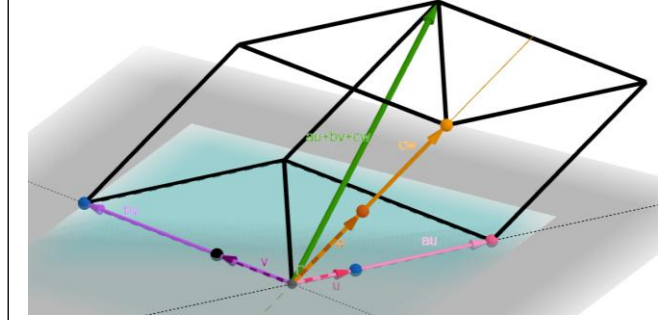
TOUT ESPACE VECTORIEL EST STABLE PAR ADDITION, MULTIPLICATION EXTERNE ET COMBINAISONS LINEAIRES.



Les vecteurs combinaisons linéaires de \vec{u} sont les vecteurs $\alpha \vec{u}$ tq $\alpha \in K$; i.e. les vecteurs colinéaires à \vec{u} .



Les vecteurs combinaisons linéaires de \vec{u} et \vec{v} sont les vecteurs $\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$ tq $\alpha, \beta \in K$; ces combinaisons linéaires sont les vecteurs coplanaires de \vec{u} et \vec{v} si \vec{u} et \vec{v} ne sont pas colinéaires.



Les vecteurs combinaisons linéaires de \vec{u}, \vec{v} et \vec{w} sont les vecteurs $\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w}$ tq $\alpha, \beta, \gamma \in K$.

