EXERCICES A TRAVAILLER !

METHODES :

•Pour étudier les relations de dépendance linéaire entre les vecteurs du famille, je cherche toutes les manières d'écrire le vecteur nul comme combinaison linéaire des vecteurs de cette famille. Si il n'existe qu'une seule manière alors c'est la manière triviale et la famille est libre, si il existe plusieurs manières alors la famille est liée et les différentes manière permettent d'obtenir toutes les relations de dépendance linéaire existantes entre les vecteurs de la famille.

•Pour obtenir une base d'un K-e-v (ou ss-e-v) F, on cherche une famille génératrice de F puis on étudie les relations de dépendance linéaire entre les vecteurs de cette famille pour ôter de cette famille les vecteurs combinaisons linéaires des autres afin de gagner en liberté sans perdre le caractère générateur de la famille.

•Pour déterminer la dimension d'un K-e-v (ou ss-e-v) F, on va chercher une base de ce K-e-v puis compter les vecteurs de cette base.

Déterminer la dimension de $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 /\ 2x - 3y + 4z = 0\}$.

$F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 /\ x = \frac{3}{2}y - 2z\} = \{(\frac{3}{2}y - 2z, y, z) /\ y,z\ réels\} = \{\left(\frac{3}{2}y, y, 0\right) + (-2z, 0, z) /\ y,z\ réels\}$. Ainsi,

$F = \{y\left(\frac{3}{2},1,0\right) + z(-2,0,1) /\ y,z\ réels\} = vect\left(\left(\frac{3}{2},1,0\right), (-2,0,1)\right)$. Donc, F est un s-e-v de $\mathbb{R}^3$ et $\left(\left(\frac{3}{2},1,0\right), (-2,0,1)\right)$est génératrice de F. Les deux vecteurs $\left(\frac{3}{2},1,0\right)$ et $(-2,0,1)$ ne sont clairement pas colinéaires donc la famille $\left(\left(\frac{3}{2},1,0\right), (-2,0,1)\right)$ est libre et est donc une base de F. J'en déduis que $dimF = 2$.

Soit $n \in \mathbb{N}\ tq\ n \geq 3. Soit\ F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] / (X^2-1)P'' - 2XP' = 0\}$. Déterminons la dimension de F.

Pour trouver la dimension de F , je vais chercher une base de F : une famille génératrice de F dont j'étudierai la liberté.

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$.

Si $\deg(P) \leq 0\ i.e. P\ constant$ alors $(X^2-1)P'' - 2XP'$ =0 donc $P \in F$.

Si $n = \deg(P) = 1\ \ (donc\ a_1 \neq 0)$; alors $(X^2-1)P'' - 2XP' = -2a_1X \neq 0$ donc $P \notin F$.

Ici $n = \deg(P) \geq 2\ (donc\ a_n \neq 0)$; alors,

$$
\begin{aligned}
P \in F &\Leftrightarrow (X^2-1)P'' - 2XP' = 0 \\
&\Leftrightarrow (X^2-1)\left[\sum_{k=2}^{n} a_k k(k-1)X^{k-2}\right] - 2X\left[\sum_{k=1}^{n} a_k k X^{k-1}\right] = 0 \\
&\Leftrightarrow \sum_{k=2}^{n} a_k k(k-1)X^k - \sum_{k=2}^{n} a_k k(k-1)X^{k-2} - \sum_{k=1}^{n} 2a_k k X^k = 0 \\
&\Leftrightarrow \sum_{k=2}^{n} a_k k(k-1)X^k - \sum_{k=0}^{n-2} a_{k+2}(k+2)(k+1)X^k - \sum_{k=1}^{n} 2ka_k X^k = 0 \\
&\Leftrightarrow 2a_2 + (6a_3 + 2a_1)X + \sum_{k=2}^{n-2}\left(a_k k(k-1) + a_{k+2}(k+2)(k+1)\right) - 2ka_k)X^k + (a_{n-1}(n-1)(n-2) - 2a_{n-1}(n-1))X^{n-1} \\
&\qquad + (a_n n(n-1) - 2a_n n)X^n = 0 \\
&\Leftrightarrow 2a_2 + (6a_3 + 2a_1)X + \sum_{k=2}^{n-2}(a_k k(k-3) + a_{k+2}(k+2)(k+1))X^k + (a_{n-1}(n-1)(n-4))X^{n-1} + (a_n n(n-3))X^n = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 2a_2 = 0 \\ 6a_3 + 2a_1 = 0 \\ \forall k \in [\![2; n-2]\!], (a_k k(k-3) + a_{k+2}(k+2)(k+1)) = 0 \\ a_{n-1}(n-1)(n-4) = 0 \\ a_n n(n-3) = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a_2 = 0 \\ a_1 = -3a_3 \\ cette\ égalité\ n'existe\ pas\ pour\ n = 3 \\ -2a_2 = 0 \\ n = 3 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow P = a_0 - 3a_3X + a_3X^3.
\end{aligned}
$$

Ainsi, $F = \{a - 3bX + bX^3 / a, b$ réels $\}$. (NB : pour $b = 0$, on retrouve bien les polynômes constants)

Donc, $F = \{a + b(-3X + X^3) / a, b$ réels $\} = vect(1, -3X + X^3)$.

(verif : Posons $P = -3X + X^3$; alors $P' = -3 + 3X^2 = 3(X^2-1) et\ P'' = 6X$ puis $(X^2-1)P'' - 2XP' = (X^2-1)6X - 2X3(X^2-1) = 0$ donc $P \in F$)

Donc F est le ss-e-v de $\mathbb{R}_n[X]$. engendré par $(1, -3X + X^3)$. La famille $(1, -3X + X^3)$ est libre car échelonnée en degré et sans polynôme nul. Donc $(1, -3X + X^3)$est une base de F. J'en déduis que $dimF = 2$.

Déterminer la dimension de $F = vect((f_k)_{k=0..6})$ où $f_0 = 1, f_1 : (x \to \cos(x)), f_2 : (x \to \sin(x)), f_3 : (x \to cos^2(x)), f_4 : (x \to sin^2(x)), f_5 : (x \to \cos(2x))$, $f_6 : (x \to \sin(2x))$.

Pour cela cherchons une base de F. Nous connaissons une famille génératrice de F : la famille $(f_k)_{k=0..6}$. Etudions sa liberté i.e. les relations de dépendance linéaire entre les vecteurs de $\mathfrak{F} = (f_k)_{k=0..6}$.

Nous savons que $\forall x \in \mathbb{R}, cos(2x) = cos^2(x) - sin^2(x)\ et\ 1 = cos^2(x) + sin^2(x)$. Autrement dit, $f_5 = f_3 - f_4 et\ f_0 = f_3 + f_4$. Par conséquent, $f_5 = 0.f_1 + 0.f_2 + 1f_3 - 1f_4 + 0.f_6\ \ et\ f_0 = 0.f_1 + 0.f_2 + 1.f_3 + 1.f_4 + 0.f_6$. Comme $f_5\ et\ f_6$ sont combinaisons linéaires des autres vecteurs de $\mathfrak{F}$, le cours assure que $F = vect(f_1, f_2, f_3, f_4, f_6)$. Montrons que la famille$(f_1, f_2, f_3, f_4, f_6)$ est libre.

Soit a, b, c, d, e des réels tels que $af_1 + bf_2 + cf_3 + df_4 + ef_6 = \underbrace{\omega}_{\substack{fonction\\ nulle}}$.

Alors, $\forall x \in \mathbb{R}, acos(x) + bsin(x) + ccos^2(x) + dsin^2(x) + esin(2x) = 0$. Montrons que $a = b = c = d = e = 0$.

1ère méthode : prenons 5 valeurs particulières de x bine choisies pour obtenir un système linéaire vérifiée par a,b,c,d et e.

$\forall x \in \mathbb{R}, \text{acos}(x) + bsin(x) + ccos^2(x) + dsin^2(x) + esin(2x) = 0(**)$. En particulier,

Pour $x = 0, a + c = 0$

Pour $x = \pi, -a + c = 0$ donc $a = c = 0$.Alors, $(**)$ $s'écrit$: $\forall x \in \mathbb{R}, bsin(x) + dsin^2(x) + esin(2x) = 0$.

Pour $x = \frac{\pi}{2}, b + d = 0$

Pour $x = -\frac{\pi}{2}, -b + d = 0$ donc $d = b = 0$.Alors, $(**)$ $s'écrit$: $\forall x \in \mathbb{R}, esin(2x) = 0$.

Pour $x = \frac{\pi}{4}, e = 0$.

J'en conclus que la famille$(f_1, f_2, f_3, f_4, f_6)$ est libre. Autrement dit, les fonctions f_1, f_2, f_3, f_4, f_6 sont linéairement indépendantes.

2ème méthode : par développement limité.

$$\forall x \in \mathbb{R}, 0 = acos(x) + bsin(x) + ccos^2(x) + dsin^2(x) + esin(2x)$$

$$0 = a\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o_0(x^4)\right) + b\left(x - \frac{x^3}{6} + o_0(x^4)\right) + c\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o_0(x^4)\right)^2 + d\left(x - \frac{x^3}{6} + o_0(x^4)\right)^2 + e\left(2x - \frac{(2x)^3}{6} + o_0(x^4)\right)$$

$$0 = a\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o_0(x^4)\right) + b\left(x - \frac{x^3}{6} + o_0(x^4)\right) + c\left(1 - x^2 + \frac{1}{3}x^4 + o_0(x^4)\right) + d\left(x^2 - \frac{x^4}{3} + o_0(x^4)\right) + e\left(2x - \frac{4}{3}x^3 + o_0(x^4)\right)$$

$0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 + 0x^4 + o_0(x^4). = a + c + (b + 2e)x + \left(-\frac{a}{2} - c + d\right)x^2 + \left(-\frac{b}{6} - \frac{4}{3}e\right)x^3 + \left(\frac{a}{24} + \frac{c}{3} - \frac{d}{3}\right)x^4 + o_0(x^4)$.

Donc par unicité de la partie principale de tout DL, on peut identifier : $\begin{cases} a + c = 0 \\ b + 2e = 0 \\ -\frac{a}{2} - c + d = 0 \\ -\frac{b}{6} - \frac{4}{3}e = 0 \\ \frac{a}{24} + \frac{c}{3} - \frac{d}{3} = 0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} c = -a \\ b = 0 \\ \frac{a}{2} + d = 0 \\ e = 0 \\ -\frac{7a}{24} - \frac{d}{3} = 0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} c = 0 \\ b = 0 \\ a = 0. \\ e = 0 \\ d = 0 \end{cases}$

J'en conclus que la famille$(f_1, f_2, f_3, f_4, f_6)$ est libre.

Ainsi la famille$(f_1, f_2, f_3, f_4, f_6)$ est une base de F et par conséquent, $dimF = 5$.

$M_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $M_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Montrons que (M_1, M_2) est une base de $\mathcal{M}_{21}(\mathbb{R})$ et déterminons les composantes de M_3 dans cette base.

Notons $\mathcal{B} = (M_1, M_2)$ .Soit $\mathcal{B}_c$=$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ la base canonique de $M_{2,1}(\mathbb{R})$. Alors $M_1 = (-1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $M_2 = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $mat_{B_c}\mathcal{B} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ et det $(mat_{B_c}\mathcal{B}) = -1$. Donc le cours assure que $\mathcal{B}$ est une autre base de $M_{2,1}(\mathbb{R})$. Ecrivons M_3comme combinaison linéaire de M_1 et M_2.

$M_3 = aM_1 + b\,M_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + 2b = 1 \\ 2a - 3b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + 2b = 1 \\ 2a - 3b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a = 5 \end{cases}$. Donc, (5,3) sont les composantes de M_3 dans $\mathcal{B}$.

Soit $P = 1 + X - 3X^2, Q = 1 + 4X - 3X^2, R = -3 + 4X + X^2$ et $S = -2 + 5X + 2X^2$.

a) Pourquoi (P, Q, R, S) est liée ?
b) Montrer que (P, Q, R, S) est génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$.
c) Extraire de la famille (P, Q, R, S) une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

a. $\mathcal{F} = (P, Q, R, S)$ est une famille de vecteurs de $\mathbb{R}_2[X]$. Or cette famille compte 4 éléments et dim$\mathbb{R}_2[X] = 3$. Cette famille a donc trop de vecteurs pour être libre . Elle est donc liée.

b. Soit $\mathcal{B}_c = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. Alors $M = mat_{B_c}\mathcal{F} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -2 \\ 1 & 4 & 4 & 5 \\ -3 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Le cours assure que $\mathcal{F}$ est génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$ sietssi $rg(M) = dim\mathbb{R}_2[X] = 3$. Or,,

$$M \sim_c \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 7 & 7 \\ \underbrace{-3}_{P} & \underbrace{0}_{Q-P} & \underbrace{-8}_{R+3P} & \underbrace{-4}_{S+2P} \end{pmatrix} \sim_c \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 7 & 7 \\ \underbrace{-3}_{P} & \underbrace{0}_{\frac{1}{3}(Q-P)} & \underbrace{-8}_{R+3P} & \underbrace{-4}_{S+2P} \end{pmatrix} \sim_c \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 7 \\ \underbrace{-3}_{P} & \underbrace{0}_{\frac{1}{3}(Q-P)} & \underbrace{-4}_{\substack{R+3P-(S+2P)\\ =R+P-S}} & \underbrace{-4}_{S+2P} \end{pmatrix} \sim_c \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 7 \\ \underbrace{-3}_{P} & \underbrace{0}_{\frac{1}{3}(Q-P)} & \underbrace{1}_{\left(-\frac{1}{4}\right)(R+P-S)} & \underbrace{-4}_{S+2P} \end{pmatrix}$$

$\sim_c \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \underbrace{-3}_{P} & \underbrace{0}_{\frac{1}{3}(Q-P)} & \underbrace{1}_{\left(-\frac{1}{4}\right)(R+P-S)} & \underbrace{0}_{S+2P-\frac{7}{3}(Q-P)+4\left(-\frac{1}{4}\right)(R+P-S)} \end{pmatrix}$.Donc $rgM = 3$ et $\mathcal{F}$ est génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$.

c. D'après le calcul précédent, $S + 2P - \frac{7}{3}(Q - P) + 4\left(-\frac{1}{4}\right)(R + P - S) = 0$ i.e. $10P - 7Q - 3R + 6S = 0$; donc, $Q = \frac{1}{7}[\,10P - 3R + 6S]$ et Q est combinaison linéaire de R, P, S. Par conséquent, $vect(R, P, S) = vect(Q, R, P, S) = \mathbb{R}_2[X]$. Donc (R, P, S)est aussi génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$. On montre matriciellement que (R, P, S) est libre (car rg$(mat_{B_c}((R, P, S)) = 3)$. Donc (R, P, S) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Autre méthode : $P = 1 + X - 3X^2, Q = 1 + 4X - 3X^2$ donc $Q - P = 3X$ et $X = \frac{1}{3}(Q - P)$.
Alors $R = -3 + 4\frac{1}{3}(Q - P) + X^2$ et $S = -2 + 5\frac{1}{3}(Q - P) + 2X^2$. Donc,
$\begin{cases} X^2 - 1 = \frac{1}{2}\left(S - \frac{5}{3}Q + \frac{5}{3}P\right) \\ X^2 - 3 = R - \frac{4}{3}Q + \frac{4}{3}P \end{cases}$ alors $\begin{cases} 1 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(S - \frac{5}{3}Q + \frac{5}{3}P\right) - R + \frac{4}{3}Q - \frac{4}{3}P\right] = \frac{1}{4}S - \frac{1}{2}R + \frac{1}{4}Q - \frac{1}{4}P \\ X^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}\left(S - \frac{5}{3}Q + \frac{5}{3}P\right) - R + \frac{4}{3}Q - \frac{4}{3}P\right] = \frac{3}{4}S - \frac{1}{2}R - \frac{7}{12}Q + \frac{7}{12}P \end{cases}$. Ainsi, $1, X$ et X^2 sont tous combinaison linéaires de P, Q, R, S. Donc, $vect(1, X, X^2) \subset vect(P, Q, R, S)$. Or, $\mathbb{R}_2[X] = vect(1, X, X^2)$ et $vect(P, Q, R, S) \subset vect(1, X, X^2)$.
J'en conclus que $vect(P, Q, R, S) = \mathbb{R}_2[X]$. La famille (P, Q, R, S) est génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$.
De plus, $P = 1 + X - 3X^2 = \frac{1}{4}S - \frac{1}{2}R + \frac{1}{4}Q - \frac{1}{4}P + \frac{1}{3}(Q - P) - 3\left(\frac{3}{4}S - \frac{1}{2}R - \frac{7}{12}Q + \frac{7}{12}P\right)$ *donc*, , $Q = \frac{1}{7}[\,10P - 3R + 6S]$ et Q est combinaison linéaire de R, P, S. Par conséquent, $vect(R, P, S) = vect(Q, R, P, S) = \mathbb{R}_2[X]$. Donc (R, P, S)est aussi génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$. On montre matriciellement que (R, P, S) est libre (car $\mathrm{rg}(mat_{B_c}((R, P, S)) = 3)$. Donc (R, P, S) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
NB : dans un e.v ; de dimension 3, une famille génératrice de cardinal 3 est toujours une base, une famille mobre de cardinal 3 est aussi une base !!! Cf chapitre suivant !!!!

Soit E un K –e-v et $\mathscr{L} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ une famille libre de vecteurs de E et $\begin{cases} \vec{u} = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath} - 3\vec{k} \\ \vec{v} = -\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 3\vec{k} \\ \vec{w} = -2\vec{\imath} + \vec{k} \\ \vec{t} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - \vec{k} \end{cases}$. Etudions la liberté de $\mathscr{F} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{t})$.

Notons $F = vect(\mathscr{L})$.Par conséquent, $\mathscr{L}$ est libre et génératrice de F. Donc, $\mathscr{L}$ est une base de F et $dimF = 3$.D'après les expressions de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ *et* $\vec{t}$, on peut affirmer$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ et $\vec{t}$ sont des vecteurs de F. Comme la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{t})$ contient 4 vecteurs et que dimF=3, nécessairement $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{t})$ est liée.

$\forall k \in [\![0, n]\!], g_k : (t \mapsto cos(kt))$.
1. Soit $(p, q) \in [\![0, n]\!]^2$. Calculer $\int_0^{2\pi} g_p(t) g_q(t) dt$
2. En déduire que $(g_0, g_1, .., g_n)$ est une famille libre dans $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. En déduire la dimension de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et la dimension de $vect(g_0, g_1, .., g_n)$.

1. $\int_0^{2\pi} \cos(pt)\cos(qt)\,dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}[\cos(pt + qt) + \cos(pt - qt)]\,dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}[\cos((p + q)t) + \cos((p - q)t)]\,dt$

Oui bien $p = q = 0$. Alors, $p + q = p - q = 0$ *et* $\int_0^{2\pi} \cos(pt)\cos(qt)\,dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi$.

Oui bien $p = q > 0$. Alors, $p + q \neq 0$ *et* $p - q = 0$ *et* $\int_0^{2\pi} \cos(pt)\cos(qt)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos((p + q)t)) + 1\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p+q}\sin((p + q)t) + t\right]_0^{2\pi} = \pi$.

Oui bien $p \neq q$. Alors, $p + q \neq 0$ *et* $p - q \neq 0$ *et* $\int_0^{2\pi} \cos(pt)\cos(qt)\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p+q}\sin((p + q)t)) + \frac{1}{p-q}\sin((p - q)t))\right]_0^{2\pi} \underbrace{=}_{\substack{car\ \forall k \in \mathbb{Z}, \\ \sin(2k\pi) = 0.}} 0$.

2. Tout d'abord, $\forall k \in [\![0, n]\!], g_k \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$tel que $\sum_{j=0}^n \lambda_j g_j = \underbrace{\omega}_{\substack{fonction \\ nulle}}$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}, \lambda_0 + \lambda_1\cos(x) + \lambda_2\cos(2x) + \dots + \lambda_n\cos(nx) = 0$.

Soit $k \in [\![0, n]\!]$. *Alors*, $0 = \int_0^{2\pi} g_k(t) \times 0\,dt = \int_0^{2\pi} g_k(t)[\,\sum_{j=0}^n \lambda_j g_j]dt = \sum_{j=0}^n \lambda_j \underbrace{\int_0^{2\pi} g_j(t)\,g_k(t)\,dt}_{=0\ si\ j \neq k} = \begin{cases} \pi\lambda_k\ si\ \ k \neq 0 \\ 2\pi\lambda_0\ si\ \ k = 0 \end{cases}$. Donc, $\lambda_k = 0$.

J'en conclus que la famille $(g_0, g_1, .., g_n)$ est une famille libre dans $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Par conséquent, pour tout entier naturel n , $(g_0, g_1, .., g_n)$ est une famille libre dans $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Cela signifie que la famille $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est libre. Une famille génératrice de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ayant plus d' éléments qu'une famille libre de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, toute famille génératrice de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est infinie. Donc $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est de dimension infinie. Par contre, pour n fixé, $(g_0, g_1, .., g_n)$ est libre et génératrice de $vect(g_0, g_1, .., g_n)$ et est donc une base de $vect(g_0, g_1, .., g_n)$. Donc $\dim\left(vect((g_0, g_1, .., g_n))\right) = n + 1$.

•Pour montrer que F et G sont supplémentaires dans E, on va vérifier que F et G sont des ss-e-v de E puis
Ou bien on montre que chaque élément de E s'écrit de manière unique comme somme d'une élément de F et d'un élément de G
Ou bien on montre que la concaténation d'une base de F et d'une base de G est une base de E.

Soit $A = \begin{pmatrix} -5 & -3 & 6 \\ 0 & -2 & 0 \\ -3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

a. Montrer que le système (S_λ): $AX = \lambda X$est de Cramer sietssi $\lambda \notin \{-2, 1\}$.
b. Soit $H = Sol((S_1)$ *et* $K = Sol((S_{-2})$. Montrer que $H \oplus K = M_{3,1}(\mathbb{R})$.

a. (S_λ): $AX = \lambda X \Leftrightarrow (A - \lambda I)X = 0$. Donc, $(A - \lambda I)$ est la matrice du système le système (S_λ).
Alors, (S_λ)est de Cramer sietssi $(A - \lambda I)$ est inversible *sietssi* $det(A - \lambda I) \neq 0$.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -5 - \lambda & -3 & 6 \\ 0 & -2 - \lambda^+ & 0 \\ -3 & -3 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = (-2 - \lambda)\begin{vmatrix} -5 - \lambda & 6 \\ -3 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = -(2 + \lambda)\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 6 \\ 1 - \lambda & 4 - \lambda \end{vmatrix} = -(2 + \lambda)(1 - \lambda)\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 - \lambda \end{vmatrix}$$
$$= -(2 + \lambda)(1 - \lambda)(4 - \lambda - 6) = (2 + \lambda)^2(1 - \lambda).$$

Donc, le système (S_λ): $AX = \lambda X$est de Cramer sietssi $\lambda \notin \{-2, 1\}$.

b.Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$(S_1): AX = X \Leftrightarrow (A - I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -6 & -3 & 6 \\ 0 & -3 & 0 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -6 & -3 & 6 \\ 0 & -3 & 0 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -6x - 3y + 6z = 0 \\ -3y = 0 \\ -3x - 3y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 0. \\ x = z \end{cases}$$

Donc, $H=\left\{\begin{pmatrix}x\\0\\x\end{pmatrix}/x\ réel\right\}$=vect$\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.

La famille $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est libre car constituée d'une seul vecteur non nul. Donc $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de H .

(S_{-2}): $AX=-2X \Leftrightarrow (A+2I)X=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}-3&-3&6\\0&0&0\\-3&-3&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow -3x-3y+6z=0 \Leftrightarrow z=\frac{1}{2}(x+y)$.

Donc, $K=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\\frac{1}{2}(x+y)\end{pmatrix}/x,y\ réels\right\}$=v$\left\{\begin{pmatrix}x\\0\\\frac{1}{2}x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\y\\\frac{1}{2}y\end{pmatrix}/x,y\ réels\right\}$ =vect$\left(\begin{pmatrix}1\\0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}\right)$.

La famille $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}\right)$. est libre car constituée deux vecteurs non colinéaires. Donc $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}\right)$. est une base de K .

Montrons (par les bases et les matrices) que $H \oplus K = M_{3,1}(\mathbb{R})$.
D'après le cours,
$H \oplus K = M_{3,1}(\mathbb{R})$ sietssi la concaténation d'une base de H et d'une base de K est une base de $M_{3,1}(\mathbb{R})$

sietssi $\mathcal{B}=\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}\right)$ est une base de $M_{3,1}(\mathbb{R})$.

sietssi $mat_{\mathcal{B}_c}\mathcal{B}$ est une base de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ où $\mathcal{B}_c$=$\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est la base canonique de $M_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1\\0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}=1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}0\\1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}=0\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Donc, $M=mat_{\mathcal{B}_c}\mathcal{B}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$. Alors, $\det(M)=\begin{vmatrix}1&1&0\\0&0&1\\1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&1\\1&\frac{1}{2}\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\neq 0$. Donc, $mat_{\mathcal{B}_c}\mathcal{B}$ est inversible. J'en déduis que $\mathcal{B}$ est une base de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ et ainsi, $H \oplus K = M_{3,1}(\mathbb{R})$.

Soit $E=\{u\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+3}=3u_{n+1}+2u_n\}$, $F=\{u\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+2}+2u_{n+1}+u_n=0\}$ et G l'ensemble des suites géométriques de raison 2.

- ***a.*** Montrer que E est un $\mathbb{R}$-e-v.
- ***b.*** Montrer que F est un plan vectoriel de E et G est une droite vectorielle de E.
- ***c.*** Prouver que F et G sont supplémentaires dans E. En déduire une famille génératrice de E.
- ***d.*** Si l'on définissait une équation caractéristique de E , quelle serait-elle ? Quelles seraient ses solutions ? Est-ce cohérent avec le résultat de la question 3. et le cours sur les suites récurrentes d'ordre 2 ?

a. Montrons que E est un ss-e-v de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

- $E\subset\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
- ω la suite nulle est éléments de E car $\forall n, \omega_{n+3}-3\omega_{n+1}-2\omega_n=0-3.0-2.0=0$.
- Soit u et v deux éléments de E et a et b deux réels. Montrons que $au+bv\in E$.

$$\forall n, (au+bv)_{n+3}-3(au+bv)_{n+1}-2(au+bv)_n=au_{n+3}+bv_{n+3}-3au_{n+2}-3bv_{n+2}-2au_n-2bv_n=a\left(\underbrace{u_{n+3}-3u_{n+2}-2u_n}_{=0\ car\ u\in E}\right)+b\left(\underbrace{v_{n+3}-3v_{n+2}-2v_n}_{=0\ car\ v\in E}\right)=0.$$ Donc, $au+bv\in E$.

J'en conclus que E est un ss-e-v de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Et par conséquent, E est un $\mathbb{R}-e-v$.

b. Tout d'abord, montrons que F et G sont inclus dans E.

Soit $u\in F$. Alors, $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+2}+2u_{n+1}+u_n=0$. Donc, $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+3}+2u_{n+2}+u_{n+1}=0$; alors,

$$u_{n+3}-(3u_{n+1}+2u_n)=-2u_{n+2}-u_{n+1}-(3u_{n+1}+2u_n)=-2u_{n+2}-4u_{n+1}-2u_n=(-2)\left(\underbrace{u_{n+2}+2u_{n+1}+u_n}_{=0}\right)=0.$$ Donc, $u\in E$.

Ainsi, $F\subset E$.
Soit $u\in G$. Alors, $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=u_0 2^n$. Donc, $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+3}-(3u_{n+1}+2u_n)=u_0 2^{n+3}-3u_0 2^{n+1}-2u_0 2^n=(8-6-2)u_0 2^n=0$. Donc, $u\in E$.
Ainsi, $G\subset E$.

Montrons que $dimF=2$ et $dimG=1$.

$G = \{u_0 2^n / u_0\ réel\} = vect((2^n)_{n\in\mathbb{N}})$. Comme $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas la suite nulle (la famille $((2^n)_{n\in\mathbb{N}})$ est donc libre) , G est la droite vectorielle de E engendrée par $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $dimG = 1$.
F est l' ensemble des suites récurrentes d' ordre 2 vérifiant: $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + 2u_{n+1} + u_n = 0$.
Posons $(e.c)$: $r^2 + 2r + 1 = (r+1)^2 = 0$. Donc $r_0 = -1$ est solution double de $(e.c)$. Alors les suites éléments de F sont toutes les suites de la forme $((an+b)(-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que a, b réels.
Autrement dit, $F = \{\left((an+b)(-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}} / a, b\ réels\} = \{a(n(-1)^n)_{n\in\mathbb{N}} + b((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}} / a, b\ réels\}$.
Donc, $F = vect((n(-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}, ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}))$. Vérifions que $((n(-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}, ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}))$ est libre.

$$a(n(-1)^n)_{n\in\mathbb{N}} + b((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}} = (0)_{n\in\mathbb{N}} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, (an+b)(-1)^n = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = 0\ (\ pour\ n = 0) \\ -(a+b) = 0\ (\ pour\ n = 1) \end{cases} \Rightarrow a = b = 0.$$

Donc $((n(-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}, ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}))$ est libre i.e. $(n(-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne sont pas colinéaires. J'en déduis que F est le plan vectoriel de E engendré par $((n(-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}, ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}})$ et $dimF = 2$.

c. Montrons que toute suite de E s'écrit de manière unique comme une suite de F et une suite de G.

Prenons donc une suite u de E quelconque. Et cherchons une suite v de F et une suite w de G telles que $u = v + w$.
Analyse : supposons que de telles suites v et w existent.

Alors il existe a, b, c réels tels que : $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} w_n = c2^n \\ v_n = (an+b)(-1)^n \\ u_n = v_n + w_n = (an+b)(-1)^n + c2^n \end{cases}$.

En particulier, $\begin{cases} b + c = u_0 \\ -a - b + 2c = u_1 \\ 2a + b + 4c = u_2 \end{cases}$. Donc, $\begin{cases} b + c = u_0 \\ -b + 8c = 2u_1 + u_2 \\ 2a + b + 4c = u_2 \end{cases}$. Donc, $\begin{cases} b + c = u_0 \\ 9c = 2u_1 + u_2 + u_0 \\ 2a + b + 4c = u_2 \end{cases}$. Donc,

$$\begin{cases} b = u_0 - \frac{1}{9}[u_0 + 2u_1 + u_2] = \frac{1}{9}[8u_0 - 2u_1 - u_2] \\ c = \frac{1}{9}[u_0 + 2u_1 + u_2] \\ a = \frac{1}{2}\left[u_2 - \frac{1}{9}[8u_0 - 2u_1 - u_2] - \frac{4}{9}[u_0 + 2u_1 + u_2]\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{-12}{9}u_0 - \frac{6}{9}u_1 + \frac{6}{9}u_2\right] = \frac{1}{3}[-2u_0 - u_1 + u_2] \end{cases}.$$

Donc si de telles suites v et w existent alors elle sont uniques et valent : $\forall n \in \mathbb{N}$,
$w_n = c2^n = \frac{1}{9}[u_0 + 2u_1 + u_2]2^n$ et $v_n = \left(\frac{1}{3}[-2u_0 - u_1 + u_2]n + \frac{1}{9}[8u_0 - 2u_1 - u_2]\right)(-1)^n$.
Synthèse : Posons $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \frac{1}{9}[u_0 + 2u_1 + u_2]2^n$ et $v_n = \left(\frac{1}{3}[-2u_0 - u_1 + u_2]n + \frac{1}{9}[8u_0 - 2u_1 - u_2]\right)(-1)^n$.
Alors, de manière évidente , $w \in G$ et $v \in F$. Montrons que $v + w = u$.
Posons $h = v + w$.

Alors $\begin{cases} h_0 = v_0 + w_0 = \frac{1}{9}[u_0 + 2u_1 + u_2] + \frac{1}{9}[8u_0 - 2u_1 - u_2] = u_0 \\ h_1 = v_1 + w_1 = -\frac{1}{3}[-2u_0 - u_1 + u_2] - \frac{1}{9}[8u_0 - 2u_1 - u_2] + \frac{2}{9}[u_0 + 2u_1 + u_2] = u_1 \\ h_2 = v_2 + w_2 = \frac{1}{3}[-2u_0 - u_1 + u_2]2 + \frac{1}{9}[8u_0 - 2u_1 - u_2] + \frac{4}{9}[u_0 + 2u_1 + u_2] = u_2 \end{cases}$. De plus

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, h_{n+3} - (3h_{n+1} + 2h_n) &= w_{n+3} - (3w_{n+1} + 2w_n) + v_{n+3} - (3v_{n+1} + 2v_n) \\ &\underbrace{=}_{\substack{car\ w\ est \\ géométrique \\ de\ raison\ 2 \\ et\ v\in F}} 8v_n - 6v_n - 2v_n - (2u_{n+2} + u_{n+1}) - (3u_{n+1} + 2u_n) \\ &\underbrace{=}_{\substack{car \\ v\in F}} -[2(-2u_{n+1} - u_n) + u_{n+1}] - (3u_{n+1} + 2u_n) = 0. \end{aligned}$$

Donc h vérifie la même relation de récurrence que u. Montrons par récurrence triple, sur n que $\forall n \in \mathbb{N}, h_n = u_n$.
Init° : $h_0 = u_0, h_1 = u_1$ et $h_2 = u_2$.
Propag° : Soit un entier naturel n . Supposons que $h_n = u_n$, $h_{n+1} = u_{n+1}$ et $h_{n=2} = u_{n+2}$. Alors,
$\forall n \in \mathbb{N}, h_{n+3} = (3h_{n+1} + 2h_n) = (3u_{n+1} + 2u_n) = u_{n+3}$.
CCL° : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = h_n$ par le théorème de récurrence triple.
Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_n + w_n$.
J'en conclus que v et w conviennent et d'après l'analyse, sont les seules suites qui conviennent.
Ainsi, toute suite de E s'écrit de manière unique comme somme d'une suite de F et d'une suite de G. J'en conclus que us que $E = F \oplus G$.
Par conséquent, la concaténation d'une base de F et d'une base de G est une base de E. J'en déduis que la famille $(n(-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}, ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}), (2^n)_{n\in\mathbb{N}}))$ est une base de E.

d. L'équation caractéristique de E serait : $r^3 - 3r - 2 = 0$.

Or, $r^3 - 3r - 2 = (r-2)(r+1)^2$: 2 est sol° simple et -1 solution double de cette équation caractéristique. Donc en étendant le théorème sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 aux suites récurrentes linéaires d'ordre 3, on obtient que les suites de E sont les suites de la forme $(an+b)(-1)^n + c(2^n))_{n\in\mathbb{N}}$ telles que a, b, c réels. Cela signifie que la famille $(n(-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}, ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}), (2^n)_{n\in\mathbb{N}}))$ est génératrice de E.