TD 18

Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels. Familles libres-génératrices-bases .

I Sous-espace vectoriel . Famille génératrice

Ex 1 vect(...)

1. Montrer que $vect\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}\right) = vect\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.
2. Soit $P(X) = 1 + 2X + X^2$, $Q(X) = 2 - X - 2X^2$ et $R(X) = -1 + 2X + kX^2$.
   Déterminer les réels k tels que : $vect(P, Q) = vect(P, Q, R)$.

Ex 2 Espace vectoriel quelqconque

Soit $(E, +, .)$ un $K - e - v$.

1. Soit F et G deux ss-e-v d'un $K.e.v$ E tq : F et G distincts de E et de $\{\overrightarrow{O_E}\}$.
   $E\backslash F$ est – il un ss-e-v de E ? $E\backslash F \cup \{\overrightarrow{O_E}\}$ est –il un ss-e-v de E ? $(F \cup G)$ est-il un ss-e-v de E ?
2. Soit F un ss-e-v de E et $\vec{y}$ et $\vec{y}$ deux vecteurs de E.

Montrer que : $F + vect(\vec{x}) = F + vect(\vec{y})$ sietssi il existe $\vec{z} \in F$ et $(a, b) \in K^2$ tels que $ab \neq 0$ et $\vec{z} + a\vec{x} + b\vec{y} = \overrightarrow{\boldsymbol{O_E}}$

3. Soit $\mathcal{G} = (\vec{u}_1, .., \vec{u}_p)$ une famille de vecteurs de E.
   - *a.* Soit F un ss-e-v de E contenant $\vec{u}_1, \vec{u}_2, .., \vec{u}_p$. Quelle propriété fondamentale de F justifie $vect(\vec{u}_1, \vec{u}_2, .., \vec{u}_p) \subset F$?
   - *b.* Soit $F = \{\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + .. + \alpha_p\vec{u}_p / (\alpha_1, .., \alpha_p) \in K^p\}$ et $G = \{\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + .. + \alpha_p\vec{u}_p / (\alpha_1, .., \alpha_p) \in K^p$ et $\alpha_1 + .. + \alpha_p = 0\}$. Lequel de ces deux ensembles F ou G est $vect(\vec{u}_1, \vec{u}_2, .., \vec{u}_p)$? Justifier. Quelle relation y-a-t-il entre F et G ?
   - *c.* Montrer que F et G sont deux ss-e-v de E et en donner des familles génératrices.
   - *d.* Donner une écriture de $\vec{u}_2$ puis de $\vec{O}$ comme combinaison linéaire de $\vec{u}_1, \vec{u}_2, .., \vec{u}_p$. Ces écritures sont-elles uniques ? A quelle condition sur $\mathcal{G}$ cette écriture est-elle unique ?
   - *e.* Compléter et justifier : $vect(\vec{u}_1, .., \vec{u}_p, \vec{w}) = vect(\vec{u}_1, .., \vec{u}_p)$ $sietssi$ $\vec{w}$ ... ...
   - *f.* Déterminer plusieurs familles génératrices de F et de G.
4. Remplir avec l'un des symboles suivants : $\Longrightarrow, \Leftarrow$ ou $\Leftrightarrow$:
   - *a.* Soit x, y et z des vecteurs de E.Alors, (x, y, z) liée .... $x \in vect(x, y)$.
   - *b.* Soit A et B deux parties de E. $A \subset B$....................$vect(A) \subset vect(B)$.
   - *c.* Soit F et G deux ss-e-v de E. $F \cup G$ ss-e-v ....$F \subset G$.
   - *d.* Soit F et G deux ss-e-v de E. $F + G = G$ ....$F \subset G$.

Ex 3 Ensembles de fonctions

Barrer dans la liste suivante les ensembles F qui ne sont pas des ss-e-v. Expliquer pourquoi ils n'en sont pas et pourquoi les autres sont des ss-e-v. Dans les cas (*), chercher une famille génératrice puis une base et la dimension de F. On précisera quand F est un plan ou une droite vectoriel(le).

1. $F = \{(x \mapsto (ax^2 + bx + c)\cos(x)) / a, b, c\ réels\}$ (*).
2. $F = \{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(1) = f(2)^2\}$
3. $F = \{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(1) = f'(1) - 3f(2)\}$
4. $F = \{(x \mapsto \tilde{P}(x)ch(x) + \tilde{Q}(x)sh(x)) / (P, Q) \in \mathbb{R}_2[X]\}$ (*)
5. F est l'ensembles des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ réelles et constantes (*).
6. Soit L un réel fixé. F est $l'ensemble$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de limite L en $+\infty$.
7. $F = \{f \in C^1([-1,0], \mathbb{R}) / \forall x \in \mathbb{R}, (x^3 - 1)f'(x) = xf(x)\}$ (*).
8. $F = \{f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / \exists(a, b, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^4, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a\cos(x - \alpha) + b\cos(x - \beta)\}$ (*)
9. Soit φ une application de $\mathbb{R}$ $dans$ $\mathbb{R}$. F est $l'ensemble$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ négligeables devant φ au voisinage de 0.
10. $F = \{f \in C^0([-1,1], \mathbb{R}) / f_{/[-1,0]}$ et $f_{/[0,1]}$ sont affines $\}$ (*).

Ex 4 Ensembles de n-uplets Mêmes questions....

1. $F = \{x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1) / (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $xz = y\}$
2. $F = \left\{(x, y, z, t, w) \in \mathbb{R}^5 / \begin{cases} 2x + y + 3z + t - 2w = 0 \\ 3x - y + z + 2t + w = 0 \\ 5x - 2y - z + t + 3w = 0 \end{cases}\right\}$.(*)
3. Soit $n \geq 3$ et $F = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / \sum_{k=1}^{n} kx_k = \sum_{k=1}^{n} x_k = 0\}$ (*)
4. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x - y)^2 = (x + y)^2\}$.
5. $F = \{(a - b, a + 3b + c, c - a) \in \mathbb{R}^3 / a, b, c\ réels\}$ (*)

Ex 5 Ensembles de vecteurs de l'espace géométrique E Mêmes questions....

Soit $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ trois vecteurs de E non coplanaires (ils forment donc une base de E)

1. $F = \{\vec{u} \in E / \exists(\mu, \gamma) \in \mathbb{R}^2; \vec{u} = \mu\vec{i} + \gamma\vec{j}\}$ (*)
2. $F = \{a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} / (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 et\ a + b + c = 0\}$(*)
3. $D = \{a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} / (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 et \begin{cases} 2a - b + c = 0 \\ a + 4b - 2c = 0 \end{cases}\}$(*)

4. Soit t un réel. $F_t = \{a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} \ /(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 et\ a+b+c=t\}$
5. $F = \{a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} \ /(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 et\ a^2+bc=0\}$
6. Soit a un réel fixé. $F_a = \{\vec{u} \in E / \underbrace{\vec{u}.\vec{i}}_{\substack{produit \\ scalaire}} = a\}$.

<u>Ex 6 Ensembles de suites</u> Mêmes questions….
1. Soit a un réel fixé. F est l'ensemble des suites réelles vérifiant : $\forall n, u_{n+2} + u_{n+1} + u_n = a$.(*)
2. F est l'ensemble des suites vérifiant : $\forall n, u_{n+1} = {u_n}^2$.
3. F est l'ensemble des suites complexes et bornées.
4. Soit u une suite réelle fixée. F est l'ensemble des suites équivalentes à u.
5. F est l'ensemble des suites majorées par leur premier terme.
6. F est l'ensemble des suites somme d'une suite croissante et d'une suite décroissante.
7. F est l'ensemble des suites périodiques.

<u>Ex 7 Ensembles de polynômes</u> Mêmes questions….Soit $n \in \mathbb{N}$.
1. $F = \{a + (a+b+c)X + (2c-b)X^2 / a,b,c\ réels\}$.(*))
2. $F = \{a + bX + cX^2 + dX^3 / a,b,c,d \in \mathbb{C}$ et $\begin{cases} a+b-c+2d=0 \\ 2a+b-c+d=0 \end{cases}\}$.(*))
3. $F = \{P \in \mathbb{R}[X] / (X^2+1)P'' - 6P = 0\}$.(*)
4. Fest l'ensemble des polynômes de degré 5.
5. Fest l'ensemble des polynômes constants. (*)
6. $F = \{P \in \mathbb{R}[X] / P(1) = P''(1) = 1\}$.
7. $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] / \int_0^1 \tilde{P}(t)dt = 0\}$.(*)
8. $F = \{P \in \mathbb{R}_5[X] / \tilde{P}(1) = \tilde{P}(-1) = \tilde{P}'(-1)\}$(*)
9. $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] / \tilde{P}(3) + 2\tilde{P}''(3) = \tilde{P}'(3)\}$(*)
10. $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] / P(X+1) = P(X)\}$(*)
11. $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] / XP(X+1) = (X+3)P(X)\}$(*)
12. $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] / \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(0) = 0\}$(*)

<u>Ex 8 Ensembles de matrices</u> Mêmes questions….Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$.
1. $F = \{\begin{pmatrix} x+y & y+z & x+z \\ -y & z & -x \end{pmatrix} / (x,y,z) \in \mathbb{C}^3\}$ (*)
2. $F = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / (a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4, \begin{cases} a+d=b-c \\ 2a+3b=c+d \end{cases}\}$ (*)
3. $Soit\ A \in M_n(\mathbb{R})\ et\ F = \{M \in M_n(\mathbb{R}) / AM = MA\}$ ((*) dans le cas où $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$).
4. F est l'ensemble des matrices complexes carrées d'ordre 2 de déterminant nul.
5. $Soit\ A \in M_n(K)$ et $F = \{M \in M_n(\mathbb{R}) / \exists P \in GL_n(K), M = PAP^{-1}\}$ (F est l'ensemble des matrices semblables à A).
6. $F = \{\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} / xy = 0\}$ $puis$ $F = \{\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} / xy \neq 0\}$
7. $F = S_3(\mathbb{R})$ (*) puis $F = A_3(\mathbb{R})$ (*) puis F est l'ensemble des matrices réelles, carrées d'ordre n et diagonales (resp triangulaires inférieures) (*)
8. F est l'ensemble des matrices carrées d'ordre n nilpotentes.

<u>II Somme, intersection, supplémentaires, somme directe or nothing…</u>

Ex 9 dans K^n
1. Soit $F = \{(a+2b, a, 2a+b, b) / (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$et $G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 /\ x - z = 0\ \ et\ \ x + y - t = 0\}$
   a. Montrer que F et G sont deux plans vectoriels de $\mathbb{R}^4$.
   b. Justifier que $F\ et\ G$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.
   c. Ecrire $X = (1,2,3,4)$ comme somme d'un élément de F et d'un élément de G.
2. $E = \mathbb{R}^n$ et $F = vect((1,1,..,1,1))$ et $G = \{(x_1, x_2, .., x_n) \in \mathbb{R}^n / \sum_{k=1}^{n} x_k = 0\}$.
   a. Justifier que F et G sont des ss-e-v de E et en déterminer une famille génératrice puis une base.
   b. Montrer que $F\ et\ G$ sont supplémentaires dans E.
3. Soit $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - 2z = 0\}\ et\ G = \{(a, 3a, b) / (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$
   a. Montrer que $G\ et\ F$ sont deux plans vectoriels. On en donnera une base et on donnera une équation de $\boldsymbol{G}$.
   b. Donner une famille génératrice de $F + G$, de $F \cap G$.
   c. Trouver un vecteur $X \in G$ tel que $F\ et\ vect(X)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
4. Soit $F = \left\{(x,y,z,t,w) \in \mathbb{R}^5 / \begin{cases} 3x - y + z - t + w = 0 \\ 2x - y - 2z - t - w = 0 \end{cases}\right\}$ et $G = \{(a, a+2b, b-a, 2a+b, a+b) / (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.
   a. Montrer que F et G sont deux ss-e-v de $\mathbb{R}^5$. F et G sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^5$?
   b. Montrer que $F = vect\big((-2,-6,0,1,1), (3,9,-1,-1,0), (1,4,-1,-1,1)\big)$
   c. Pour quelles valeurs du réel x , $(2x, 0, 3, -3, x) \in G$?
   d. Donner un système d'équations décrivant G (comme pour F).

Ex 10 dans $\mathfrak{F}(\boldsymbol{D}, \mathbb{R})$
1. Soit E l'espace vectoriel des applications de [0,1] dans $\mathbb{R}$ continues sur [0,1] . Soit F l'ensemble des applications de [0,1] dans $\mathbb{R}$ constantes et $G = \left\{f \in C^0([0,1], \mathbb{R}) / \int_0^1 f(t)dt = 0\right\}$
   a. Justifier que F est une droite vectorielle.
   b. Montrer que F et G sont deux ss-e-v de E supplémentaires dans E. Que peut -on alors dire de G ?
   c. Décomposer $(x \mapsto x^2 \ln(1+x))$ comme somme d'un élément de F et d'un élément de G .

2. Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, $E = C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $F = \{f \in E / f(0) = f'(0) = 0\}$, G l'ensemble des applications affines et H l'ensemble des applications polynomiales de degré inférieur ou égal à n et $V = vect(ch, sh)$
   a. Montrer que F , G et H sont des ss-e-v de E tels que $F \oplus G = E$ et $F \oplus V = E$.
   b. Déterminer $f \in F$ et $g \in G$ $telles$ que $exp = f + g$. Donner une expression intégrale à f.
   c. Déterminer une base de G et une base de H.
   d. Décrire $F \cap H$ et $G \cap H$. Montrer que $(F \cap H) \oplus G = H$.

Ex 11 dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

1. Soit $p \in \mathbb{N}$ et $F = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \forall n, u_{n+4} = u_n\}$ et $G = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / u_3 = u_2 = u_1 = u_0 = 0\}$.
   a. Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ supplémentaires dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
   b. Déterminer une base de F.
2. Soit $E = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 3u_{n+1} + 2u_n\}$, $F = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + 2u_{n+1} + u_n = 0\}$ et G l'ensemble des suites géométriques de raison 2.
   a. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-e-v.
   b. Montrer que F est un plan vectoriel de E et G une droite vectorielle de E.
   c. Prouver que F et G sont supplémentaires dans E. En déduire une famille génératrice de E.
   d. Si l'on définissait une équation caractéristique de E , quelle serait-elle ? Quelles seraient ses solutions ? Est-ce cohérent avec le résultat de la question 3. et le cours sur les suites récurrentes d'ordre 2 ?

Ex 12 dans $\mathbb{R}[X]$ ou de $\mathbb{R}_n[X]$.

1. Soit $F = \{aX + bX^2 / a, b \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{P \in \mathbb{R}_3[X] / \tilde{P}(1) = \tilde{P}'(2) = 0\}$.Montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}_3[X]$.
2. Soit Q un polynôme réel fixé non nul et de $degré$ p. Soit F l'ensemble des polynômes divisibles par Q . Montrer que F et $\mathbb{R}_{p-1}[X]$ sont deux sous-e-v supplémentaires dans $\mathbb{R}[X]$.
3. $F = \{P \in \mathbb{R}[X] / \tilde{P}(1) = 0\}$ et $G = \{aX / a \in \mathbb{R}\}$.
   a. Montrer que G est une droite vectorielle. .
   b. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.
   c. Donner un sous espace vectoriel de E qui ne soit pas supplémentaire de F dans $\mathbb{R}[X]$.
   d. Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner une famille génératrice de $F \cap \mathbb{R}_n[X]$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ et $F = \{P \in \mathbb{R}[X] / P(X^2) = (X^2+1)P(X)\}$ et $G = \{P \in \mathbb{R}_n[X] / \tilde{P}(1) = \tilde{P}(0)\}$.
   a. Montrer que F est un ss—e-v de $\mathbb{R}[X]$ et en trouver une base de F. Idem pour G.
   b. Montrer que F et G sont deux ss-e-v de $\mathbb{R}_n[X]$ supplémentaires dans $\mathbb{R}_n[X]$.
5. Parmi les ss-e suivants, lesquels sont supplémentaires de l'espaces des polynômes pairs de $\mathbb{R}$[X] ?
   a. l'espace des polynômes de $\mathbb{R}$[X] impairs
   b. $\{P(X) + X^2 / P \in \mathbb{R}[X]$ $impair\}$
   c. $\{P \in \mathbb{R}[X] / P(1) = 0\}$
   d. $Vect((X^{3n})_{n\in\mathbb{N}})$.

Ex 13 dans $M_n(\mathbb{R})$.

1. $E = M_n(\mathbb{R})$. $Soit$ F l'ensemble des matrices de E de trace nulle.
   a. Démontrer que F et $vect(I_n)$ sont deux sous-e-v de $M_n(\mathbb{R})$ supplémentaires dans $M_n(\mathbb{R})$.
   b. Trouver une base de F.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $F = \{M \in M_3(\mathbb{R}) / AM = O_3\}$ et $G = \{M \in F / AM = MA\}$.
   a. Montrer F est un ss-e-v de $M_3(\mathbb{R})$ et G est un ss-e-v de F. Trouver une base de F et une base de G.
   b. A est-elle inversible ? Les éléments de F sont-ils inversibles ?
   c. Déterminer toutes les matrices M de F telles que $A + M$ est inversible.
   d. Prouver que F et G sont stables par produit matriciel.
3. Soit $D = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$et $F = \{M \in M_2(\mathbb{R}) / DM = MD\}$. Soit (e) l'équation $M^3 = D$ d' inconnue $M \in M_2(\mathbb{R})$.
   a. Montrer que F est une ss-e-v de $M_2(\mathbb{R})$ et en trouver une base.
   b. Monter que si M est solution de (e) alors $M \in F$. En déduire les solutions de (e).

III Familles libres, familles liées. Bases.

Ex 14 Liberté ou liaison d'une famille de fonctions

1. Soit , $f_0 = 2$, $f_1 : (x \mapsto \ln(3x))$, $f_2 : (x \mapsto \frac{1}{x})$, $f_3 : (x \mapsto \ln(9x))$, $f_4 : \left(x \mapsto \frac{1}{x^2+x}\right)$, $f_5 : \left(x \mapsto \frac{1}{x+1}\right)$, $f_6 : \left(x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}\right)$. Déterminer une base de vect($f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$) .
2. Soit $a \in \mathbb{R}$, $f_1 = \sin$, $f_2 : (t \mapsto \sin(t+a))$ et $f_3 : (t \mapsto \cos(t+a))$. (f_1, f_2, f_3)est -elle libre ?
3. Soit $f_1 = \exp$, $f_2 : \left(t \mapsto \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) e^{-\frac{t}{2}}\right)$ et $f_3 : \left(t \mapsto \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) e^{-\frac{t}{2}}\right)$ et $G = vect(f_1, f_2, f_3)$.
   a. Soit a , b , c trois réels tels que $af_1 + bf_2 + cf_3$ =0. Montrer que $a = b = c = 0$ par $deux$ $méthodes$.
      i. Prendre des valeurs de t et conclure.
      ii. Utiliser un développement limité de $af_1 + bf_2 + cf_3$ au voisinage de 0 et conclure.

b. Quelle est $dim(G)$?

c. Soit $F = \{f \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})/f'' + f' + f = 0\}$.Montrer que $G = F \oplus vect(f_1)$.

d. Déterminer une base de vect(g_1, g_2, g_3, g_4) où

$g_1: (t \to 3e^{-\frac{t}{2}}(sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - 2cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right))$ $\qquad g_3: (t \to e^{-\frac{t}{2}}(2sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)+e^{3t/2})$

$g_2: (t \to e^t - e^{-\frac{t}{2}}(sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right))$ $\qquad g_4: (t \to e^{-\frac{t}{2}}(-sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + 3cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)) + 4e^t)$.

4. Montrer que ces familles sont libres

a. $\forall k \in \mathbb{N}$, on pose , $f_k: \left(x \to Arctan^k(x)\right)$.Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(f_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est libre .

b. $\forall k \in \mathbb{N}$, on pose $h_k: (x \to \cos(kx))$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(h_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est libre.

c. $\forall a \in I$, on pose $f_a: (x \to x^a)$. Soit $a_1, a_2, \dots, a_n$ des réels distincts Montrer que la famille $\left(f_{a_1}, f_{a_2}, \dots, f_{a_n}\right)$ est libre dans $C^\infty(\mathbb{R}^{+*},\mathbb{R})$.

d. $\forall a \in \mathbb{R}$, on pose $\varphi_a: \left(x \to \sqrt{|x-a|}\right)$. Soit $a_1, a_2, \dots, a_n$ des réels distincts.
Montrer que la famille $\left(\varphi_{a_1}, \varphi_{a_2}, \dots, \varphi_{a_n}\right)$ est libre dans $C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

e. $\forall a \in \mathbb{R}$, on pose $\varphi_a: \left(x \to \begin{cases} 1\ si\ x = a \\ 0\ si\ x \neq a \end{cases}\right)$. Soit $a_1, a_2, \dots, a_n$ des réels distincts. Montrer que la famille $(\varphi_a)_{a\in I}$ est libre dans $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

f. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $f_k: (t \mapsto e^{kt})$ .Montrer que $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ est libre.

Ex 14 Famille de polynômes.

1. Etudier la liberté de la famille $(P_1, P_2, .., P_5)$ tel que $P_1 = 1 - 2X + X^3$, $P_2 = -2X - X^4$, $P_3 = X^2 - 2X^3 + 2X^4$, $P_4 = 3 + 2X - 3X^4$, $P_5 = 1 - X^2 - X^3 - X^4$.

2. Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2 tq\ a \neq b$ et $n \in \mathbb{N}$. F l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_4[X]$admettant a et b comme racines

a. Montrer que F est un ss-e-v de $\mathbb{R}_4[X]$ et en déterminer une base.

b. Montrer que la famille $((X+a)^{n-k}(X+b)^k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est libre.

3. Déterminer une $\mathbb{R}$-base du $\mathbb{R}$-e-v $\mathbb{C}_3[X]$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}\ et\ P \in \mathbb{R}[X]$ tq $\deg(P) = n$. Justifier que $\left(P, P', .., P^{(n)}\right)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

5. Montrer que $(1. X. (X+1). (X+2) \dots . (X+n-1))_{n\in\mathbb{N}}$est une base de $\mathbb{R}[X]$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}\ et\ a_0, a_1, \dots, a_n$ des réels tous distincts.

c. Soit $i \in [\![0,n]\!]$.Déterminer l'unique polynôme $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que : $\forall k \in [\![0,n]\!]\backslash\{i\}, \widetilde{L_i}(a_k) = 0$ et $\widetilde{L_i}(a_i) = 1$.

d. Montrer que $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Donner les composantes du polynôme constant 1 dans cette base.

Exemple : Soit $n \in \mathbb{N}$ et pose pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, $L_i(X) = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n} \frac{X-k}{i-k}$. Montrer que la famille $(L_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.Quelles sont les composantes du polynôme 1 puis de X dans cette base ?

e. En déduire que $\varphi: \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}^{n+1}$ définie par : $\varphi(P) = (\tilde{P}(a_0), \tilde{P}(a_1), \dots, \tilde{P}(a_n))$ est bijective.

f. On définit $F = \{f \in F(\mathbb{R},\mathbb{R})/\ f\ polynomiale\ et\ \deg(f) \leq n\}$ et $G = \{f \in F(\mathbb{R},\mathbb{R})/\ f(a_0) = f(a_1) = \ldots = f(a_n) = 0\}$.Montrer que F et G sont deux ss-e-v de $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$ supplémentaires dans $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Exercice 15 Famille de suites.

1. Montrer que la famille de suites (u, v, w, z) est libre lorsque :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \ln^2(n+1)\ , v_n = \sqrt{n}, w_n = (-1)^n, z_n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n.$$

2. $\forall k \in \mathbb{N}$, $v_k = (n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ (on note $v_k(n)$=n^k) . Soit $m \in \mathbb{N}$. Montrer que , $\left(v_{,0}, v_1, \dots, v_m\right)$ est une famille libre dans $\mathbb{R}^\mathbb{N}$.

3. Déterminer est une base du $\mathbb{C}$-e-v des suites complexes 4-périodiques.

4. Soit $u = (1,10,0,1,1,0,0,1,1,0,0, \dots)$, $v = (0,1,0,-1,0,1,0,-1,0,1, \dots \dots)$, $w = (1,0,02,1,0,0,2,1,0,0,1,2,0 \dots)$ et $t = (0,0,3,1,0,0,3,1,0,0, \dots)$. Montrer que (u, v, w, t) est une base du $\mathbb{C}$-e-v des suites 4-périodiques.

Exercice 16 Dans un K-e-v E de dimension quelconque.

1. Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}\ et\ \mathscr{L} = (\vec{u}_i)_{i=1..n}$une famille libre de vecteur d'un K- espace vectoriel E .

a. Etudier la liberté de la famille $\mathscr{F}$ =$(\vec{u}_1 + \vec{u}_2, \vec{u}_2 + \vec{u}_3, .., \vec{u}_{n-1} + \vec{u}_n, \vec{u}_1 + \vec{u}_n)$.

b. Soit $p \in [\![1, n-1]\!]$Justifier que $vect(\vec{u}_1, .., \vec{u}_p)\ et\ vect(\vec{u}_{p+1}, .., \vec{u}_n)$ sont en somme directe.

c. Soit F et G deux ss-e-v de E tels que : $F\oplus$G=E et $G = vect\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\right)$.Soit $\vec{a} \in F$ et
$G_a = vect\left(\vec{a} + \vec{u}_1, \vec{a}+\vec{u}_2, \dots, \vec{a} + \vec{u}_p\right)$. Montrer que G_a et F sont supplémentaires dans E.

2. Justifier que G_a est de dimension finie et déterminer sa dimension.

3. Ici E est de dimension finie p, de base $\mathscr{B}$= $(\vec{e}_i)_{i=1..p}$. On pose : $\forall i \in [\![1, n-1]\!]$, $\vec{\varepsilon_i} = \vec{e}_i - \left(\vec{e}_{i+1} + \vec{e}_{i+2} + .. + \vec{e}_p\right)$ et $\vec{\varepsilon_p} = \vec{e_p}$. Montrer que $\mathscr{B}' = (\vec{\varepsilon_i})_{i=1..p}$est une base de E . Soit $\vec{x} \in E$. Exprimer les composantes de $\vec{x}$ dans la base $\mathscr{B}'$ en fonction les composantes de $\vec{x}$ dans B.

TD 19
Familles libres -génératrices -bases-dimension.

Exercice 1 Dans des ensembles de fonctions

1. Déterminer le rang de $(ch, sh, f : (x \mapsto 1), g : \left(x \mapsto ch(2x)\right), ch^2, sh^2)$
2. Soit $f_1 = \exp$, $f_2 : \left(t \mapsto \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)e^{-\frac{t}{2}}\right)$ $et\ f_3 : \left(t \mapsto \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)e^{-\frac{t}{2}}\right)$. Et $F = vect(f_1, f_2, f_3)$
   e. Déterminer la dimension de F.
   f. Déterminer le rang de la famille $\mathscr{G} = (g_1, g_2, g_3, g_4)$ où

$g_1 : (t \to 3e^{-\frac{t}{2}}(sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - 2cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right))$

$g_2 : (t \to e^t - e^{-\frac{t}{2}}(sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right))$

$g_3 : (t \to e^{-\frac{t}{2}}(2sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + e^{3t/2})$

$g_4 : (t \to e^{-\frac{t}{2}}(-sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + 3cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)) + 4e^t$

Exercice 2 Dans des ensembles des polynômes ou fonctions polynomiales.

6. Quel est le rang de $(P_1, P_2, .., P_5)$ tel que $P_1 = 1 - 2X + X^3$, $P_2 = -2X - X^4$, $P_3 = X^2 - 2X^3 + 2X^4$, $P_4 = 3 + 2X - 3X^4$, $P_5 = 1 - X^2 - X^3 - X^4$? Déterminer une base de $vect(P_1, P_2, .., P_5)$.

7. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la famille $(x \mapsto (x+1)^{n-k}x^k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ est une base du $\mathbb{R} - e - v$ des fonctions polynomiales de degré inférieur à n.

8. **a.** Soit $n \in \mathbb{N}/n \geq 3$. Déterminer la dimension du $\mathbb{C}$-e-v $F = \{P \in \mathbb{C}_n[X]/(X+i)^2 divise\ P\}$.
   b. Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{C}_n[X]$.
   c. Montrer que $H = \left\{P \in \mathbb{C}_n[X]/\widetilde{P}(i) = 0\right\}$ est un hyperplan de $\mathbb{C}_n[X]$. Trouver un supplémentaire de H dans $\mathbb{C}_n[X]$.
   d. Montrer que $H + F = \mathbb{C}_n[X]$.
   e. H et F sont-ils en somme directe ?
   f. Donner une base de $F \cap H, F + H, F \cap K, F + K$.

9. Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X]/\mathrm{P}(\mathrm{X}^2) = \mathrm{X}^2\mathrm{P}(\mathrm{X})\}$ et $G = \{P \in \mathbb{R}_3[X]/\tilde{P}(-1) = \tilde{P}(2)\}$.
   a. Montrer que F et G sont deux ss-e-v de $\mathbb{R}_3[X]$ et préciser leur dimension.
   b. Montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}_3[X]$.

10. Dans $\mathbb{R}_\mathrm{n}[X]$, on pose $P_0 = 1\ et\ \forall k \in [\![1,n]\!], P_k = \frac{1}{k!}X(X-k)^{k-1}$.
   a. Montrer que $(P_k)_{k=0\ldots n}$ est une base de $\mathbb{R}_\mathrm{n}[X]$.
   b. Montrer que $\forall j \in [\![0,n]\!], \forall k \in [\![0,j]\!], P_j^{(k)}(X) = P_{j-k}(X-k)$.
   c. En déduire que $P_j^{(k)}(k) = 0$ pour tous j et k distincts dans $[\![0,n]\!]$.
   d. Déterminer les composantes d'un polynôme P de $\mathbb{R}_\mathrm{n}[X]$ dans cette base.

Exercice 3 Dans un ensemble de suites.

5. Calculer le $rg(u, v, w, z)$ où $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \ln^2(n+1)$, $v_n = \sqrt{n}, w_n = (-1)^n, z_n = \left(1 - \frac{1}{\mathrm{n}+1}\right)^n$.

6. Quelle est la dimension du $\mathbb{C}$-e-v des suites complexes 4-périodiques ?

7. Objectif : montrer que la famille $((k^n)_{n\in\mathbb{N}})_{k\in\mathbb{N}}$ est libre dans $\mathbb{R}^\mathbb{N}$. Fixons $m \in \mathbb{N}$.

On pose $\forall i \in [\![0,m]\!], L_i(X) = \prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{m} \frac{X-k}{i-k}$.

   a. Montrer que la famille $B = (L_0, L_1, \ldots, L_m)$ est une base de $\mathbb{R}_m[X]$.
   b. Montrer que $\forall P \in \mathbb{R}_m[X], (P(0), P(1), \ldots, P(m))$ sont les composantes de P dans cette base B.
   c. Soit $B_c = (1, X, X^2, \ldots, X^m)$ la base canonique de $\mathbb{R}_m[X]$. Déterminer la matrice de passage de B à B_c.
   d. En déduire que la famille $((k^n)_{n\in\mathbb{N}})_{k\in[\![0,\ldots,m]\!]}$ est libre.
   e. Qu'en déduit-on sur le $\mathbb{R}$-e-v $\mathbb{R}^\mathbb{N}$?

Exercice 4 Dans un K-e-v E de dimension quelconque.

4. Ici E est de dimension finie p ,de base $\mathscr{B} = (\vec{e}_i)_{i=1..p}$. On pose : $\forall i \in [\![1, n-1]\!], \vec{\varepsilon_i} = \vec{e}_i - \left(\vec{e}_{i+1} + \vec{e}_{i+2} + .. + \vec{e}_p\right)$ et $\vec{\varepsilon_p} = \vec{e_p}$. Montrer que $\mathscr{B}' = (\vec{\varepsilon_i})_{i=1..p}$ est une base de E . Soit $\vec{x} \in E$. Exprimer les composantes de $\vec{x}$ dans la base $\mathscr{B}'$ en fonction des composantes de $\vec{x}$ dans B.

5. Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}\ et\ \mathscr{L} = (\vec{u}_i)_{i=1..n}$ une famille libre de vecteurs d'un K- espace vectoriel E .
   d. Etudier la liberté de la famille $\mathscr{F} = (\vec{u}_1 - \vec{u}_2, \vec{u}_2 - \vec{u}_3, .., \vec{u}_{n-1} - \vec{u}_n, \vec{u}_n)$.
   e. Etudier la liberté de la famille $\mathscr{F} = (\vec{u}_1 + \vec{u}_2, \vec{u}_2 + \vec{u}_3, .., \vec{u}_{n-1} + \vec{u}_n, \vec{u}_1 + \vec{u}_n)$.
   f. Soit $p \in [\![1, n-1]\!]$. Justifier que $vect(\vec{u}_1, .., \vec{u}_p)\ \ et\ vect(\vec{u}_{p+1}, .., \vec{u}_n)$ sont en somme directe.
   g. Soit $G = vect\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p\right)$ et F un ss-e-v de E tels que : $F \oplus G = E$.
      i. Justfier qu'il existe un vecteur non nul $\vec{a}$ dans F .
      ii. $G_a = vect\left(\vec{a} + \vec{u}_1, \vec{a} + \vec{u}_2, \ldots, \vec{a} + \vec{u}_p\right)$. Montrer que G_a et F sont supplémentaires dans E.

6. Soit E un K −espace vectoriel admettant une base $B = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

On pose: $\begin{cases} \vec{u} = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath} - 3\vec{k} \\ \vec{v} = -\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 3\vec{k} \\ \vec{w} = -2\vec{\imath} + \vec{k} \\ \vec{t} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - \vec{k} \end{cases}$ $et\ F = \{a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + c\vec{k} / (a,b,c) \in K^3 et\ a + b = c = \frac{a}{2}\}$ et $G = vect(\vec{u}, \vec{v})$.

- **a.** Vérifier que F est un ss-e-v de E et $F \oplus G = E$.
- **b.** La famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{t})$est-elle libre ? Est-elle génératrice de E ?
- **c.** Extraire de cette famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{t})$une base de E . Et exprimer $\vec{t}$ comme $c.l.$ de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.
- **d.** Déterminer un système d'équations de $G\ dans\ B$
- **e.** Soit $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ trois vecteurs de E tels que $mat_B(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{pmatrix} 1+x & x & x \\ y & 1+y & y \\ z & z & 1+z \end{pmatrix}$ où $(x,y,z) \in K^3$.
  - i. Exprimer $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ en fonction de $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$.
  - ii. $H = \{(x,y,z) \in K^3 / (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ est une famille libre$\}$ est -il un ss-e-v de K^3?

Exercice 5 dans $\mathbb{R}^n$.

1. Déterminer une $\mathbb{R}$-base du $\mathbb{R}$-e-v $\mathbb{C}^n$.
2. Etudier la liberté de la famille $\mathcal{F} = ((1,2,3,4,1), (2,3,1,2,1), (0,-1-5,-6,-1), (3,3,-6,-6,0))$ et déterminer un supplémentaire de vect $\mathcal{F}$ dans $\mathbb{R}^5$.
3. Etudier la liberté de la famille $((a,1,0,a), (0,a,2a+2,0), (1,0,a,0), (2a,0,1,a))$ $où\ a$ paramètre réel .
4. Montrer que $((1,0,1), (-1,-1,1), (-2,1,-2))$est une base de $\mathbb{R}^3$. Ecrire $X = (x,y,z)$ dans cette nouvelle base
5. $V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / x - 2y = 0\ et\ y - 2z = 0\}$ et $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / x + z = y + t\}$
   - **a.** Donner une base de $V \cap W\ et\ de\ V + W$.
   - **b.** Donner un supplémentaire H de $V \cap W$ dans W.
   - **c.** Montrer que $V\ et\ H$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.
6. $E = \mathbb{R}^n$ et $F = vect((1,1,..,1,1))$ et $G = \{(x_1, x_2, .., x_n) \in \mathbb{R}^n / \sum_{k=1}^{n} x_k = 0\}$.
   - **c.** Justifier que $\boldsymbol{F}$ et $\boldsymbol{G}$ sont des ss-e-v de E de dimension finie et déterminer leur dimension.
   - **d.** Montrer que $\boldsymbol{F}\ \boldsymbol{et}\ \boldsymbol{G}$ sont supplémentaires dans $\boldsymbol{E}$.
7. $F = \{(x_1, .., x_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n} / \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 = \sum_{i=n+1}^{2n} x_i\}$. Montrer que F est un ss-e-v de $\mathbb{R}^{2n}$.Déterminer la dimension de F et un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^{2n}$

Exercice 6 dans $M_{n,p}(\mathbb{R})$.

1. Déterminer la dimension de $AS_n(\mathbb{R})$.
2. Soit $A = diag(2,2,1)$.Trouver la dimension de $E = \{M \in M_3(\mathbb{R}) / AM = MA\}$. Déterminer un supplémentaire de E dans $M_3(\mathbb{R})$.
3. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$.Trouver la dimension de $E = \{AM / M \in M_2(\mathbb{R})\}$. Déterminer un supplémentaire de E dans $M_{3,2}(\mathbb{R})$.
4. Montrer que la famille $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right)$ est libre et la compléter pour obtenir une base de $M_{3,2}(\mathbb{R})$.
5. La famille $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right)$ est -elle une base de $M_2(\mathbb{R})$? Si oui, donner les composantes de $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dans cette base.

Exercice 7 Soit E un Ke v de dimension finie $n \geq 2$.

1. Soit $(m,p) \in \mathbb{N}^{*2}$ tel que $p \leq m$. Soit $(\vec{x}_1, .., \vec{x}_m)$ une famille de vecteurs de E .
   Montrer que, $rg(\vec{x}_1, .., \vec{x}_p) \geq rg(\vec{x}_1, .., \vec{x}_m) + p - m$.
2. Soit $F\ et\ G$ deux ss-e-v de E de dimension $p \in [\![1, n-1]\!]$. On cherche à prouver que $F\ et\ G$ ont un supplémentaire H dans E commun.
   - a) Trouver H dans le cas où $F = G$.
   - b) On suppose que $F \neq G$.
     - i) Montrer que $F \not\subset G\ et\ G \not\subset F$.
     - ii) Construire un vecteur $\overrightarrow{u_1} \notin F \cup G$. On pose $F_1 = F + vect(\overrightarrow{u_1})$ et $G_1 = G + vect(\overrightarrow{u_1})$.
     - iii) Trouver H dans le cas où $F \neq G$ et $p + 1 = n$.
     - iv) Si $p + 1 < n$, montrer que $F_1 \neq G_1\ et$ poursuivre le raisonnement pour trouver H.