COLLE 24

QDC 3 Soit E un $K-e-v$ .Démontrer que l'intersection de ss-e-v de E est un ss-e-v de E. Prouver que le réunion de deux ss-e-v de E n'est pas forcément un ss-e-v de E.

Ex 1 H l'ensemble des fonctions continues sur $[-1;1]$ et affines sur [-1, 0] et affines sur [0,1].

1. Montrer que H est un ss-e-v de $C^0([-1,1],\mathbb{R})$ de dimension finie.
2. Soit $G=\{f\in C^0([-1,1],\mathbb{R})/\,f(0)=f(-1)=f(1)=0\}$. Montrer que $F\oplus G=C^0([-1,1],\mathbb{R})$.

Ex 2 Soit a et b deux réels distincts et F l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_4[X]$ qui admettent a et b comme racines.

a. Montrer que F est un ss-e-v de $\mathbb{R}_4[X]$.
b. Trouver une famille génératrice ;

QDC 2 Soit E un $K-e-v$ et $\overrightarrow{u_1},\dots,\overrightarrow{u_n}$ des vecteurs de E. Montrer que l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs $\overrightarrow{u_1},\dots,\overrightarrow{u_n}$ est un ss-e-v de E.

Ex 1 Soit $H=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4/x+2t=z-y\}$ et $G=\{(a,b,3a,a+b))/a,b\ réels\}$

1. Montrer que H et G sont deux ss-e-v de $\mathbb{R}^4$. En déterminer une famille génératrice de chacun de ces espaces. .
2. Déterminer une famille génératrice de $H\cap G$ et une base de $H+G$.
3. H et G sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?

Ex 2 Soit $F=\{P\in\mathbb{R}_3[X]/2P(1)=P''(0)\}$

1. Montrer que $F=$vect$(X-1,X^3-1,X^2)$.
2. Montrer que $F\oplus\mathbb{R}_0[X]=\mathbb{R}_3[X]$.

QDC 4 Démontrer la caractérisation de deux ss-e-v supplémentaires.

Ex 1 Soit $A=diag(1,2,3)$ et $F=\{M\in M_3(\mathbb{R})/AM=MA\}$ et $G=\{M\in M_3(\mathbb{R})/tr(M)=0\}$.

1. Montrer que F est un ss-e-v de $M_3(\mathbb{R})$ et trouver sa dimension. De même pour G.
2. Déterminer une base de $F+G$ et une base de $F\cap G$.

Ex 2 Soit E un K-e-v de dimension 4 muni de la base $B=(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k},\vec{s})$.
Soit $F=\{x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k}+t\vec{s}/x+y=z+t\}$ et $G=$vect$(\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

a. Montrer que F est un ss-e-v de E et déterminer une famille génératrice de F
b. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.

QDC 1 Démontrer que dans le $K-e-v\ (E,+,.)$, $\forall\vec{x}\in E,\forall\alpha\in K.$ $(\alpha.\vec{x}=\vec{0}$ **si et ssi** $\alpha=0\ ou\ \vec{x}=\overrightarrow{0_E}$)
QDC 2 Soit E un $K-e-v$ et $\overrightarrow{u_1},\dots,\overrightarrow{u_n}$ des vecteurs de E. Montrer que l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs $\overrightarrow{u_1},\dots,\overrightarrow{u_n}$ est un ss-e-v de E.
QDC 3 Soit E un $K-e-v$ .Démontrer que l'intersection de ss-e-v de E est un ss-e-v de E. Prouver que le réunion de deux ss-e-v de E n'est pas forcément un ss-e-v de E.
QDC 4 Démontrer la caractérisation de deux espaces en somme directe et celle de deux ss-e-v supplémentaires.
QDC 5 $(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\dots,\overrightarrow{u_p})$ est une famille liée sietssi l'un vecteur de cette famille est combinaison linéaire des autres.