Programme de colle 26

Révision de la méthode de décomposition en éléments simples dans les cas simples $\frac{P}{Q}$ tq $degQ \leq 4$ et des applications : calcul intégral $\left(I = \int_0^1 \frac{1}{t^3+1} dt\right)$, simplification de sommes $\left(S_n = \sum_{k=3}^{n} \frac{k}{k^3-2k^2-k+2}\right)$, expression de dérivées $n$ièmes $\left(f(x) = \frac{1-5x^3}{x^3-4x}\right)$.

Chapitre 18 Familles de vecteurs.

III Famille finie libre ou/et génératrice. Base.

1. Famille libre

Définition

Soit E un K-e-v et $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p})$ une famille de vecteurs de E.

- $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p})$ est une famille libre lorsque la seule manière d'écrire $\overrightarrow{0_E}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p}$ st la manière triviale $\overrightarrow{0_E} = 0.\overrightarrow{u_1} + 0.\overrightarrow{u_2} + \dots + 0.\overrightarrow{u_p}$; autrement dit lorsque l'équation $\overrightarrow{0_E} = \lambda_1.\overrightarrow{u_1} + \lambda_2.\overrightarrow{u_2} + \dots + \lambda_p.\overrightarrow{u_p}$ d'inconnue $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \in K^p$ admet $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) = (0,0, \dots, 0)$ comme unique solution.
- $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p})$ est une famille liée lorsque $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p})$ n'est pas libre ; autrement dit lorsqu'il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \neq (0,0, \dots, 0)$ tel que $\overrightarrow{0_E} = \lambda_1.\overrightarrow{u_1} + \lambda_2.\overrightarrow{u_2} + \dots + \lambda_p.\overrightarrow{u_p}$.

Caractérisation

- $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p})$ est une famille libre sietssi aucun vecteur de cette famille n'est combinaison linéaire des autres.
- $((\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p})$ est une famille liée sietssi l'un vecteur de cette famille est combinaison linéaire des autres.

Opérations

- La liberté d'une famille ne dépend pas de l'ordre des vecteurs dans cette famille.
- Si l'on ajoute à une famille libre $\mathcal{L}$ un vecteur qui n'est pas combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{L}$ alors la famille obtenue est encore libre.
- Toute famille extraite d'une famille libre est encore libre (i.e. si on ôte des vecteurs à une famille libre, la famille conserve la liberté).
- Les opérations élémentaires sur les vecteurs d'une famille libre $\mathcal{L}$ conserve la liberté de $\mathcal{L}$.

Exemples à connaitre et reconnaitre

- Toute famille de polynômes non nuls et tous de degrés distincts est libre.
- Toute famille de n-uplets non nuls et échelonnés en zéros (par la droite ou la gauche) ou de matrices-colonnes non nulles et échelonnées en zéros (par le haut ou le bas) est libre.

Propriété

- Si $\mathcal{L}$ est une famille libre alors tout vecteur de $vect(\mathcal{L})$ s écrit de manière unique comme combinaison linéaire de vecteurs de $\mathcal{L}$

2. Familles génératrices.

Définition et caractérisation

$(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p})$ une famille de vecteurs de F est génératrice de F lorsque $vect(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p}) = F$.

Si F est un ss-e-v de E alors $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p})$ est génératrice de F sietssi $\forall k \in [\![1,n]\!], \overrightarrow{u_k} \in F$ et tout vecteur de F est combinaison linéaire de $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p}$.

Opérations

- Le caractère générateur d'une famille ne dépend pas de l'ordre des vecteurs dans cette famille.
- Si l'on ôte à une famille génératrice $\mathcal{G}$ de F un vecteur qui est combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{G}$ alors la famille obtenue est encore génératrice de F. Et plus précisément,
  $vect(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p}, \overrightarrow{u_{p+1}}) = vect(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p}) \Leftrightarrow \overrightarrow{u_{p+1}}$ est combinaison linéaire de $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p}$.
- Si $\mathcal{G}'$ est une famille de vecteurs de F qui contient une famille génératrice de F alors $\mathcal{G}'$ est aussi génératrice de F.
- Les opérations élémentaires sur les vecteurs d'une famille génératrice $\mathcal{G}$ conserve le caractère générateur de $\mathcal{G}$.
- Si $F = vect(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p})$ et $G = vect(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_q})$ alors $F + G = vect(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_q})$.

3. Base

Définition

Soit E un K-e-v. $\mathcal{B} = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p})$ est une base de E lorsque $\mathcal{B}$ est génératrice de E et libre.

Caractérisation . Définition des composantes et de la dimension.

$\mathcal{B}$ est une base du K-e-v E sietssi tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$.

Si $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ est une base du K-e-v E alors $\forall \vec{x} \in E, \exists! (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in K^n / \vec{x} = \alpha_1\overrightarrow{e_1} + \alpha_2\overrightarrow{e_2} + \dots + \alpha_n\overrightarrow{e_n}$ et $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ sont les composantes de $\vec{x}$ dans $\mathcal{B}$. La matrice de $\vec{x}$ dans $\mathcal{B}$ est matrice de $mat_{\mathcal{B}}\vec{x} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$.

Soit $\mathfrak{F} = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p})$ une famille de vecteurs de E. $mat_{\mathfrak{B}}\mathfrak{F} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{np} \end{pmatrix}$ où $\forall j \in [\![1,p]\!], \overrightarrow{u_j} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\overrightarrow{e_i}$.

Dans un K-e-v E, toutes les bases de E, s'il en existe, ont le même nombre d'éléments (même cardinal).

Ce nombre d'éléments commun à toutes les bases de E est la dimension de E noté $\dim(E)$.

Chapitre 19 : Espaces vectoriels de dimension finie.

I Dimension finie .

Définition d'un K-e-v de dimension finie (resp. infinie).

Un K-e-v E est de dimension finie lorsque E admet une famille génératrice finie.

Condition suffisante pour être un K-e-v de dimension infinie .

Si E contient une famille $(\overrightarrow{e_k})_{k\in\mathbb{N}}$telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\dots,\overrightarrow{e_n})$ est libre alors E est de dimension infinie.

Comparaison du cardinal d'une famille libre et cardinal d'une famille génératrice

Dans un K-e-v E de dimension finie, le cardinal de n'importe quelle famille libre de vecteurs de E est inférieur ou égal au cardinal de toute famille génératrice de E.

Existence d'une base et définition de la dimension.

Tout K-e-v E de dimension finie et non réduit à $\{\overrightarrow{O_E}\}$ a une base de cardinal fini et toutes les bases de E ont le même cardinal.

Ce cardinal commun à toutes les bases de E est la dimension de E.

Bases et dimension des K-e-v de référence .

Une droite vectorielle est un e-v de dimension 1. Un plan vectoriel est un e-v de dimension 2.

Si P *est le* $\mathbb{R}-e-v$ des vecteurs du plan, alors une base de P est formée de 2 vecteurs de P non colinéaires et $dim_{\mathbb{R}}\, P = 2$

Si E est le $\mathbb{R}-e-v$ des vecteurs de l'espace géométrique alors une base de E est formée de trois vecteurs de E non coplanaires et $dim_{\mathbb{R}}\, E = 3$.

$dim_K\, K = 1$. Base de K : (1).

$dim_K\, K^n = n$. Base canonique de K^n: $((1,0,..,0),(0,1,0,..,0),\dots,(0,0,\dots,0,1)$

$dim_K M_{n,p}(K) = np$. Base canonique de $M_{n,p}(K)$: $(E_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$

$dim_K\, K_n[X] = n+1$. Base canonique de $K_n[X]$: $(1,X,X^2,..,X^n)$. Base de Taylor en α de $K_n[X]$: $(1, X-\alpha, (X-\alpha)^2,..,(X-\alpha)^n)$.

$dim_K\, K[X] = +\infty$.

$dim_K\, \mathscr{F}(I,K) = +\infty$, $dim_K\, C^k(I,K) = +\infty$, $dim_K\; D^k(I,K) = +\infty$, $dim_K\; C^\infty(I,K) = +\infty$.

$dim_K\, K^{\mathbb{N}} = +\infty$.

II Famille de vecteurs dans un K-e-v de dimension finie

Comparaison de la dimension avec le cardinal d'une famille libre et avec le cardinal d'une famille génératrice

Dans un K-e-v E de dimension finie, si $\mathcal{G}$ est une famille génératrice de E , $\mathcal{B}$ est une base de E et $\mathcal{L}$ une famille libre de vecteurs de E alors, $card(\mathcal{L}) \le card(\mathcal{B}) \le card(\mathcal{G})$.

Caractérisation d'une base : famille libre et maximale ou famille génératrice et minimale .

Soit E K-e-v de dimension finie et $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E

$\mathcal{F}$ est une base de E sietssi $\mathcal{F}$ est libre et card($\mathcal{F}$)=dim(E).

sietssi $\mathcal{F}$ est génératrcie et card($\mathcal{F}$)=dim(E).

Théorème de complétion d'une famille libre pour obtenir une base

Dans un K-e-v E de dimension finie, toute famille libre $\mathcal{L}$ peut être compléter par $dim(E) - card(\mathcal{L})$ vecteurs bien choisis parmi les vecteurs Tapez une équation ici.d'une base de E pour obtenir une nouvelle base de E.

Théorème d'extraction d'une base d'une famille génératrice .

Dans un K-e-v E de dimension finie, de toute famille génératrice $\mathcal{G}$ on peut ôter $card(\mathcal{G}) - dim(E)$ vecteurs bien choisis parmi les vecteurs d'une base de $\mathcal{G}$ pour obtenir une nouvelle base de E.

Matrice d'une famille de vecteurs dans une base finie.

Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\dots\overrightarrow{e_n})$ une base d'un K-e-v E de dimension finie n . Soit $\mathcal{V} = (\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\dots,\overrightarrow{v_p})$ une famille de vecteurs de E .

$\forall j \in \{1,..p\}$, notons $(\alpha_{1j},\alpha_{2j},\dots,\alpha_{nj})$ les composantes de $\overrightarrow{v_j}$ dans $\mathcal{B}$ ie. $\overrightarrow{v_j} = \sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}\overrightarrow{e_i}$

$$mat_{\mathcal{B}}\mathcal{V} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} \overrightarrow{v_1} & \overrightarrow{v_2} & \cdots & \overrightarrow{v_p} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1p} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{np} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \overrightarrow{e_1} \\ \overrightarrow{e_2} \\ \vdots \\ \overrightarrow{e_n} \end{array} \end{array}$$

$\Delta : \begin{pmatrix} E \to M_{n,1}(K) \\ \vec{x} \to mat_B\vec{x} \end{pmatrix}$ est une bijection.

Soit $\vec{x}$ *et* $\vec{y}$ deux vecteurs de E , α,β deux scalaires. Alors $mat_{\mathcal{B}}\,(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \alpha mat_{\mathcal{B}}\,\vec{x} + \beta mat_{\mathcal{B}}\,\vec{y}$.

Soit $\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\dots,\overrightarrow{v_p}$des vecteurs de E . $\vec{x} = \alpha_1\overrightarrow{v_1} + \alpha_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + \alpha_p\overrightarrow{v_p}$ si et ssi $mat_{\mathcal{B}}\,\vec{x} = \alpha_1 mat_{\mathcal{B}}\overrightarrow{v_1} + \alpha_2 mat_{\mathcal{B}}\overrightarrow{v_2} + \cdots + \alpha_p mat_{\mathcal{B}}\,\overrightarrow{v_p}$.

Caractérisation matricielle d »'une base

Soit $\mathcal{V} = (\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\dots,\overrightarrow{v_p})$.des vecteurs de E . $\mathcal{V}$ *base de* E si et ssi $mat_{\mathcal{B}}\mathcal{V}$ est inversible. Et le cas échéant, $(mat_{\mathcal{B}}\mathcal{V})^{-1} = mat_{\mathcal{V}}\mathcal{B}$.

Matrice de passage entre deux bases

Si $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont deux bases de E alors $mat_{\mathcal{B}_1}\mathcal{B}_2$ est appelée la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$.

$mat_{\mathcal{B}_1}\mathcal{B}_2$ est inversible et $(mat_{\mathcal{B}_1}\mathcal{B}_2)^{-1} = mat_{\mathcal{B}_2}\mathcal{B}_1$.

Formule de changement de bases pour les vecteurs

Soit $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases de E. Soit $\vec{v}$ un vecteur de E . Alors , $mat_{\mathcal{B}_1}(\vec{v}\,) = mat_{\mathcal{B}_1}\mathcal{B}_2 \times mat_{\,\mathcal{B}_2}(\vec{v}\,)$.

III Ss-e-v d' un K-e-v de dimension finie

Dimension d'un sous–e-v d'un K-e-v de dimension finie .

Si F est un ss-e-v d'un K-e-v E de dimension finie alors F est de dimension finie et $dim(F) \le dim(E)$ et $(F = E \Leftrightarrow dim(E) = dim(F))$.

Caractérisation de ss-e-v supplémentaires .

Soit F *et* G un ss-e-v d'un K-e-v E de dimension finie .

F et G sont supplémentaires dans $E \Leftrightarrow$la concaténation d' une base de F et une base de G est une base de E.

Lorsque $F \oplus G = E$, $dim(F) + dim(G) = dim(E)$.

Existence et construction d'un supplémentaire .

Si F est un ss-e-v d'un K-e-v E de dimension finie alors F admet un supplémentaire dans E et ce supplémentaire est engendré par les vecteurs qui complètent une base de F pour obtenir une base de E.

Formule de Grassmann .

Soit F et G un ss-e-v d'un K-e-v E de dimension finie . $dim(F) + dim(G) = dim(F + G) + dim(F \cap G)$.

IV Rang d'une famille de vecteurs

Si $\mathscr{F}$ est une famille de vecteurs de E alors $rg\mathscr{F} = \dim(vect(\mathscr{F}))$.

$rg\mathscr{F} \leq \min(dimE, card\mathscr{F})$.

$\mathscr{F}$est libre $\Leftrightarrow rg(\mathscr{F})$=card$(\mathscr{F})$

$\mathscr{F}$est génératrice de E $\Leftrightarrow rg(\mathscr{F})$=dim$(E)$.

Si $\mathscr{B}$ est une base de E alors $rg(\mathscr{F})$ =$rg(mat_{\mathscr{B}}\mathscr{F})$.

Caractérisation matricielle d'une famille libre-génératrice, d'une base

On suppose que E admet une base finie $\mathfrak{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ où $n = \dim(E) \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathfrak{F} = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p})$ une famille de vecteurs de E où $p = card(\mathfrak{F}) \in \mathbb{N}^*$.

1. $\mathscr{F}$ est libre **<u>sietssi</u>** $p = rg\ (mat_{\mathfrak{B}}\mathfrak{F})$.

2. $\mathscr{F}$ est liée **<u>dès que</u>** $p > n$.

3. $\mathscr{F}$ est génératrice de E **<u>sietssi</u>** $n = rg\ (mat_{\mathfrak{B}}\mathfrak{F})$.

4. $\mathscr{F}$ n' est pas génératrice de E **<u>dès que</u>** $p < n$.

5. $\mathscr{F}$ est une base de E **<u>sietssi</u>** $p = n = rg\ (mat_{\mathfrak{B}}\mathfrak{F})$ **<u>sietssi</u>** $mat_{\mathfrak{B}}\mathfrak{F}$ est inversible.

Question de cours : Savoir énoncer tout résultat de cours et savoir énoncer et démontrer les résultats suivants :

1) Dans un K-e-v E de dimension finie, le cardinal d'une famille libre est inférieur ou égal à celui d'une famille génératrice de E.
2) La formule de changement de bases pour les vecteurs.
3) Dans un K-e-v E de dimension finie, tout ss-e-v F de E admet un supplémentaire dans E.
4) La formule de Grassmann.