

**EXERCICES soutien et colle 24-25-26** (\*exercices plus ou moins traités en classe,\*\* certaines questions sont plus théoriques ou astucieux)

**Ex1\*** Soit  $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + 2t = z - y\}$  et  $G = \{(a, b, 3a, a + b) / a, b \text{ réels}\}$

1. Montrer que  $H$  et  $G$  sont deux ss-e-v de  $\mathbb{R}^4$ . Déterminer la dimension de chacun de ces espaces.
2. Déterminer une base de  $H \cap G$  et une base de  $H + G$ .
3.  $H$  et  $G$  sont-ils supplémentaires dans  $\mathbb{R}^4$  ?
4. Déterminer un supplémentaire de  $H$  dans  $\mathbb{R}^4$ .

**Ex2\*** Déterminer une base de  $F = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \forall n, u_{n+2} + 2u_{n+1} + 2u_n = 0\}$  et une base de  $G = \{f \in D^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / \forall x, f''(x) + 2f'(x) + 2f(x) = 0\}$ .

**Ex3\*** Soit  $E$  un  $K$ -e-v de dimension 4 muni de la base  $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}, \vec{s})$ .

Soit  $F = \{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} + t\vec{s} / x, y, z, t \in K \text{ et } x + y = z + t\}$  et  $G = \text{vect}(\vec{i} + 2\vec{j}, 3\vec{i} - \vec{j})$ .

- a. Justifier que  $G$  est un ss-e-v de  $E$  et déterminer une base de  $G$ . Faire de même pour  $F$ .
- b. Montrer que  $F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $E$ .
- c. Trouver un **autre** supplémentaire de  $F$  dans  $E$ .
- d. Compléter  $G = \{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} + t\vec{s} / x, y, z, t \in K \text{ et } \dots\}$

Soit  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$  trois vecteurs de  $E$  tels que  $\text{mat}_B(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}) = \begin{pmatrix} 1+x & x & x & x \\ y & 1+y & y & y \\ z & z & 1+z & z \\ t & t & t & 1+t \end{pmatrix}$  où  $(x, y, z, t) \in K^4$ .

- e. Exprimer  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$  en fonction de  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  et  $\vec{s}$ .
- f.  $H = \{(x, y, z, t) \in K^4 / (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}) \text{ est une famille libre}\}$  est-il un ss-e-v de  $K^4$  ?

**Ex4\*** Soit  $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] / 2P(1) = P''(0)\}$  et  $G = \{(X-3)P / P \in \mathbb{R}_2[X]\}$

1. Montrer que  $F = \text{vect}(X-1, X^3-1, X^2)$ .
2. Montrer que  $G$  est un ss-e-v de  $\mathbb{R}_3[X]$  et déterminer la dimension de  $G$ .
3.  $F$  et  $G$  sont-ils supplémentaires dans  $\mathbb{R}_2[X]$  ?
4. Trouver un supplémentaire  $H$  de  $F$  et de  $G$ .

**Ex5\*\*** Soit  $a$  et  $b$  deux réels distincts et  $F$  l'ensemble des polynômes de  $\mathbb{R}_4[X]$  qui admettent  $a$  et  $b$  comme racines.

1. Montrer que  $F$  est un ss-e-v de  $\mathbb{R}_4[X]$  et donner sa dimension.
2. Trouver un supplémentaire de  $F$  dans  $\mathbb{R}_4[X]$ .

**Ex6\*** Soit  $A = \text{diag}(1, 2, 3)$  et  $F = \{M \in M_3(\mathbb{R}) / AM = MA\}$  et  $G = \{M \in M_3(\mathbb{R}) / \text{tr}(M) = 0\}$ .

1. Montrer que  $F$  est un ss-e-v de  $M_3(\mathbb{R})$  et trouver sa dimension. Faire de même pour  $G$ .
2. Déterminer une base de  $F + G$  et une base de  $F \cap G$ .
3. Trouver un supplémentaire de  $G$  dans  $M_3(\mathbb{R})$ .

**Ex7\*\***  $H$  l'ensemble des fonctions continues sur  $[-1, 1]$  et affines sur  $[-1, 0]$  et affines sur  $[0, 1]$ .

1. Montrer que  $H$  est un ss-e-v de  $C^0([-1, 1], \mathbb{R})$  de dimension finie.
2. Soit  $G = \{f \in C^0([-1, 1], \mathbb{R}) / f(0) = f(-1) = f(1) = 0\}$ . Montrer que  $F \oplus G = C^0([-1, 1], \mathbb{R})$ .

**Ex8\*\*** Soit  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$  et  $\mathcal{L} = (\vec{u}_i)_{i=1..n}$  une famille libre de vecteur d'un  $K$ -espace vectoriel  $E$ .

1. Etudier la liberté de la famille  $\mathcal{F} = (\vec{u}_1 + \vec{u}_2, \vec{u}_2 + \vec{u}_3, \dots, \vec{u}_{n-1} + \vec{u}_n, \vec{u}_1 + \vec{u}_n)$ .
2. Soit  $p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ . Justifier que  $\text{vect}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$  et  $\text{vect}(\vec{u}_{p+1}, \dots, \vec{u}_n)$  sont en somme directe.
3. Soit  $F$  et  $G$  deux ss-e-v de  $E$  tels que :  $F \oplus G = E$  et  $G = \text{vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$ . Soit  $\vec{a} \in F$  et  $G_{\vec{a}} = \text{vect}(\vec{a} + \vec{u}_1, \vec{a} + \vec{u}_2, \dots, \vec{a} + \vec{u}_p)$ .
  - a. Montrer que  $G_{\vec{a}}$  et  $F$  sont supplémentaires dans  $E$ .
  - b. Justifier que  $G_{\vec{a}}$  est de dimension finie et déterminer sa dimension.

4. Ici  $E$  est de dimension finie  $p$ , de base  $\mathcal{B} = (\vec{e}_i)_{i=1..p}$ . On pose :  $\forall i \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket, \vec{\varepsilon}_i = \vec{e}_i - (\vec{e}_{i+1} + \vec{e}_{i+2} + \dots + \vec{e}_p)$  et  $\vec{\varepsilon}_p = \vec{e}_p$ . Montrer que  $\mathcal{B}' = (\vec{\varepsilon}_i)_{i=1..p}$  est une base de  $E$ . Soit  $\vec{x} \in E$ . Exprimer les composantes de  $\vec{x}$  dans la base  $\mathcal{B}'$  en fonction des composantes de  $\vec{x}$  dans  $\mathcal{B}$ .

**Ex9\***  $E = \mathbb{R}^n$ ,  $U = (1, 1, \dots, 1, 1) \in \mathbb{R}^n$  et  $F = \text{vect}(U)$  et  $G = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / \sum_{k=1}^n x_k = 0\}$ . Justifier que  $F$  et  $G$  sont des ss-e-v de  $E$  et déterminer leur dimension. Montrer que  $F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $E$ .

**Ex 10\*\*** Soit  $F = \{(x \mapsto ach(x) + bsh(x)) / (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$  et  $G = \{f \in D(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / f(0) = f'(0) = 0\}$ .

1. Montrer que  $F$  et  $G$  sont deux ss-e-v de  $D(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . Déterminer la dimension de  $F$ .
2. Montrer que  $F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $D(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . En déduire la dimension de  $G$ .
3. Décomposer  $\exp$  puis  $\cos$  dans cette somme directe.
4. Donner un plan vectoriel de  $D(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  qui n'est pas supplémentaire de  $G$  dans  $D(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

5.  $\forall k \in \mathbb{N}^*, f_k : t \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{k}{t^2}} & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$ . Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, (f_0, f_1, \dots, f_n)$  est une famille libre de **vecteurs de  $G$** . Qu'en déduit-on à nouveau sur  $G$  ?

**Ex11\*** Soit  $f_0 = 2, f_1 : (x \mapsto \ln(3x)), f_2 : (x \mapsto \frac{1}{x}), f_3 : (x \mapsto \ln(9x)), f_4 : (x \mapsto \frac{1}{x^2+x}), f_5 : (x \mapsto \frac{1}{x+1}), f_6 : (x \mapsto \frac{\ln(x)}{x})$ . Déterminer  $\text{rg}(f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)$ .

**Ex 12\*** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On pose  $f_k : (t \mapsto e^{kt})$ . Montrer que  $(f_0, f_1, \dots, f_n)$  est libre.

**Ex13\*\***  $\forall a \in \mathbb{R}, \varphi_a : (x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = a \\ 0 & \text{si } x \neq a \end{cases})$ . Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . Montrer que la famille  $(\varphi_a)_{a \in I}$  est libre dans  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .