Programme de colle 26 bis

Révision de la méthode de décomposition en éléments simples dans les cas simples $\frac{P}{Q}$ tq $degQ \leq 4$ et des applications : calcul intégral $(I = \int_0^1 \frac{1}{t^3+1} dt)$, simplification de sommes $(S_n = \sum_{k=3}^{n} \frac{k}{k^3-2k^2-k+2})$, expression de dérivées $n$ièmes $(f(x) = \frac{1-5x^3}{x^3-4x})$.

CHAPITRE 19 : Espaces vectoriels de dimension finie.

I Dimension finie .

Définition d'un K-e-v de dimension finie (resp. infinie).

Un K-e-v E est de dimension finie lorsque E admet une famille génératrice finie.

Condition suffisante pour être un K-e-v de dimension infinie .

Si E contient une famille $(\overrightarrow{e_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ est libre alors E est de dimension infinie.

Comparaison du cardinal d'une famille libre et cardinal d'une famille génératrice

Dans un K-e-v E de dimension finie, le cardinal de n'importe quelle famille libre de vecteurs de E est inférieur ou égal au cardinal de toute famille génératrice de E.

Existence d'une base et définition de la dimension.

Tout K-e-v E de dimension finie et non réduit à $\{\overrightarrow{O_E}\}$ a une base de cardinal fini et toutes les bases de E ont le même cardinal.

Ce cardinal commun à toutes les bases de E est la dimension de E.

Bases et dimension des K-e-v de référence .

Une droite vectorielle est un e-v de dimension 1 de base constituée d'un seul vecteur non nul de D.
Un plan vectoriel P est un e-v de dimension 2 de base constituée de deux vecteurs non colinéaires de P.
Si P *est le* $\mathbb{R}-e-v$ des vecteurs du plan, alors une base de P est formée de 2 vecteurs de P non colinéaires et $dim_{\mathbb{R}} P = 2$
Si E est le $\mathbb{R}-e-v$ des vecteurs de l'espace géométrique alors une base de E est formée de trois vecteurs de E non coplanaires et $dim_{\mathbb{R}} E = 3$.
$dim_K K = 1$. Base de K : (1).
$dim_K K^n = n$. Base canonique de K^n: $((1,0,..,0), (0,1,0,..,0), \dots, (0,0,\dots,0,1))$
$dim_K M_{n,p}(K) = np$. Base canonique de $M_{n,p}(K)$: $(E_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$
$dim_K K_n[X] = n+1$. Base canonique de $K_n[X]$: $(1, X, X^2, .., X^n)$. Base de Taylor en α de $K_n[X]$: $(1, X-\alpha, (X-\alpha)^2, .., (X-\alpha)^n)$.
$dim_K K[X] = +\infty$.
$dim_K \mathscr{F}(I,K) = +\infty$, $dim_K C^k(I,K) = +\infty$, $dim_K D^k(I,K) = +\infty$, $dim_K C^\infty(I,K) = +\infty$.
$dim_K K^{\mathbb{N}} = +\infty$.

II Famille de vecteurs dans un K-e-v de dimension finie

Comparaison de la dimension avec le cardinal d'une famille libre et avec le cardinal d'une famille génératrice

Dans un K-e-v E de dimension finie, si $\mathcal{G}$ est une famille génératrice de E , $\mathcal{B}$ est une base de E et $\mathcal{L}$ une famille libre de vecteurs de E alors, $card(\mathcal{L}) \leq card(\mathcal{B}) \leq card(\mathcal{G})$.

Caractérisation d'une base : famille libre et maximale ou famille génératrice et minimale .

Soit E K-e-v de dimension finie et $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E
$\mathcal{F}$ est une base de E sietssi $\mathcal{F}$ est libre et card($\mathcal{F}$)=dim(E).
sietssi $\mathcal{F}$ est génératrcie et card($\mathcal{F}$)=dim(E).

Théorème de complétion d'une famille libre pour obtenir une base

Dans un K-e-v E de dimension finie, toute famille libre $\mathcal{L}$ peut être compléter par $dim(E) - card(\mathcal{L})$ vecteurs bien choisis parmi les vecteurs Tapez une équation ici.d'une base de E pour obtenir une nouvelle base de E.

Théorème d'extraction d'une base d'une famille génératrice .

Dans un K-e-v E de dimension finie, de toute famille génératrice $\mathcal{G}$ on peut ôter $card(\mathcal{G})-dim(E)$ vecteurs bien choisis parmi les vecteurs d'une base de $\mathcal{G}$ pour obtenir une nouvelle base de E.

Matrice d'une famille de vecteurs dans une base finie.

Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots \overrightarrow{e_n})$ une base d'un K-e-v E de dimension finie n . Soit $\mathcal{V} = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_p})$ une famille de vecteurs de E .
$\forall j \in \{1,..p\}$, notons $(\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \dots, \alpha_{nj})$ les composantes de $\overrightarrow{v_j}$ dans $\mathcal{B}$ ie. $\overrightarrow{v_j} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}\overrightarrow{e_i}$

$$mat_{\mathcal{B}}\mathcal{V} = \begin{array}{cc} \begin{matrix} \overrightarrow{v_1} & \overrightarrow{v_2} & \cdots & \overrightarrow{v_p} \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1p} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{np} \end{pmatrix} & \begin{matrix} \overrightarrow{e_1} \\ \overrightarrow{e_2} \\ \vdots \\ \overrightarrow{e_n} \end{matrix} \end{array}$$

$\Delta: \begin{pmatrix} E \to M_{n,1}(K) \\ \vec{x} \to mat_B\vec{x} \end{pmatrix}$ est une bijection.

Soit $\vec{x}$ *et* $\vec{y}$ deux vecteurs de E , α, β deux scalaires. Alors $mat_{\mathcal{B}}(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \alpha mat_{\mathcal{B}}\vec{x} + \beta mat_{\mathcal{B}}\vec{y}$.

Soit $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_p}$ des vecteurs de E . $\vec{x} = \alpha_1\overrightarrow{v_1} + \alpha_2\overrightarrow{v_2} + \dots + \alpha_p\overrightarrow{v_p}$ si et ssi $mat_{\mathcal{B}}\vec{x} = \alpha_1 mat_{\mathcal{B}}\overrightarrow{v_1} + \alpha_2 mat_{\mathcal{B}}\overrightarrow{v_2} + \dots + \alpha_p mat_{\mathcal{B}}\overrightarrow{v_p}$.

Caractérisation matricielle d »'une base

Soit $\mathcal{V} = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_p})$.des vecteurs de E . $\mathcal{V}$ *base de* E si et ssi $mat_{\mathcal{B}}\mathcal{V}$ est inversible. Et le cas échéant, $(mat_{\mathcal{B}}\mathcal{V})^{-1} = mat_{\mathcal{V}}\mathcal{B}$.

Matrice de passage entre deux bases

Si $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont deux bases de E alors $mat_{\mathcal{B}_1}\mathcal{B}_2$ est appelée la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$.
$mat_{\mathcal{B}_1}\mathcal{B}_2$ est inversible et $(mat_{\mathcal{B}_1}\mathcal{B}_2)^{-1} = mat_{\mathcal{B}_2}\mathcal{B}_1$.

Formule de changement de bases pour les vecteurs

Soit $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ deux bases de E. Soit $\vec{v}$ un vecteur de E . Alors , $mat_{\mathscr{B}_1}(\vec{v}\,) = mat_{\mathscr{B}_1}\mathscr{B}_2 \times\ mat\ _{\mathscr{B}_2}(\vec{v}\,)$.

III Ss-e-v d' un K-e-v de dimension finie

Dimension d'un sous–e-v d'un K-e-v de dimension finie .

Si F est un ss-e-v d'un K-e-v E de dimension finie alors F est de dimension finie et $dim(F) \leq dim(E)$ et $(F = E \Leftrightarrow dim(E) = dim(F))$.

Caractérisation de ss-e-v supplémentaires .

Soit $F\ et\ G$ un ss-e-v d'un K-e-v E de dimension finie .
F et G sont supplémentaires dans E⟺la concaténation d' une base de F et une base de G est une base de E.
Lorsque $F \oplus G = E, dim(F) + dim(G) = dim(E)$.

Existence et construction d'un supplémentaire .

Si F est un ss-e-v d'un K-e-v E de dimension finie alors F admet un supplémentaire dans E et ce supplémentaire est engendré par les vecteurs qui complètent une base de F pour obtenir une base de E.

Formule de Grassmann .

Soit $F\ et\ G$ un ss-e-v d'un K-e-v E de dimension finie . $dim(F) + dim(G) = dim(F + G) + dim(F \cap G)$.

IV Rang d'une famille de vecteurs

Si $\mathscr{F}$ est une famille de vecteurs de E alors $rg\mathscr{F} = \dim\ (vect(\mathscr{F}))$.
$rg\mathscr{F} \leq \min(dimE, card\mathscr{F})$.
$\mathscr{F}$est libre ⟺$rg(\mathscr{F})$=card($\mathscr{F}$)
$\mathscr{F}$est génératrice de E ⟺$rg(\mathscr{F})$=dim(E).
$Si\ \mathscr{B}$ est une base de E alors $rg(\mathscr{F})$ =$rg(mat_{\mathscr{B}}\mathscr{F})$.

Chapitre 20 : Applications linéaires.

I Généralités

Définition et règles de calcul

$f \in \mathscr{L}(E,F)$ dans F lorsque f est une application de E dans F et $\forall(\vec{x},\vec{y}) \in E^2, \forall(\alpha,\beta) \in K^2, f(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \alpha f(\vec{x}) + \beta f(\vec{y})$.

Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ alors $f(\overrightarrow{0_E}) = \overrightarrow{0_F}$ et $\forall(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},..,\overrightarrow{u_n}) \in E^n, \forall(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n) \in K^n, f(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\overrightarrow{u_k}) = \sum_{k=1}^{n}\alpha_k f(\overrightarrow{u_k})$.

Exemples.

Application linéaire nulle : $\omega: E \to F\ telle\ que\ \ \omega(\vec{x}) = \overrightarrow{0_F}$
Endomorphisme nul $\omega: E \to E\ telle\ que\ \ \omega(\vec{x}) = \overrightarrow{0_E}$. Identité $id_E: E \to E\ telle\ que\ \ id_E(\vec{x}) = \vec{x}$.
Homothétie h vectorielle de rapport $\alpha \in K^*$: $h: E \to E\ telle\ que\ \ h(\vec{x}) = \alpha\vec{x}$.
Trace, transposition, opérateur Intégral, dérivation (...).

Propriété fondamentale

Soit $B = (\vec{e_i})_{i\in I}$ une base de l'espace vectoriel E et $(\vec{y_i})_{i\in\in I}$ une famille de vecteurs de F . Il existe une unique application linéaire f de E vers F qui vérifie : $\forall i \in I, f(\vec{e}_i) = \vec{y}_i$.
Une application linéaire f de $E\ dans\ F$ est entièrement caractérisée par la donnée des images par f des vecteurs d'une base de E .
Deux applications linéaires de E dans F coïncidant en tout vecteur d'une base de E sont égales (partout).
Une application linéaire f de $E\ dans\ F$ est entièrement caractérisée par la donnée des images par f des vecteurs d'une base de E .
Deux applications linéaires de E dans F coïncidant en tout vecteur d'une base de E sont égales (partout).
Soit $E = E_1 \oplus E_2\ et\ u_1 \in \mathscr{L}(E_1,F)$ et $u_2 \in \mathscr{L}(E_2,F)$. Il existe une unique application linéaire u de E vers F tq : $u_{/E_1} = u_1\ et\ u_{/E_2} = u_2$.

Opérations sur les applications linéaires.

Une combinaison linéaire ou une composée d'applications linéaires ou une bijection réciproque d'un isomorphisme est linéaire.
Calculs dans $\mathscr{L}(E)$: $\forall(f,g,u,v) \in\mathscr{L}(E)^4, \forall(\alpha,\beta,a,b) \in K^4,\ (\alpha f + \beta g)\circ(au + bv) = \alpha a(f\circ u) + \alpha b(f\circ v) + \beta(g\circ u) + \beta(g\circ v)$.
Itérés d'un endomorphisme : Soit$f \in\mathscr{L}(E)$. $f^0 = id_E$ et $\forall n\in\mathbb{N}, f^{n+1} = f^n\circ f = f\circ f^n = f\circ f\circ\dots\circ f\ \in\mathscr{L}(E)$.

Formule du binôme de Newton et formule de factorisation : Si $f\ et\ g$ sont deux endomorphismes de E tels que $\underbrace{f\circ g = g\circ f}_{f\ et\ g\ commutent}$, alors

1. $\forall(n,m,p,q) \in \mathbb{N}^4, (f\circ g)^n = f^n\circ g^n = g^n\circ f^n$ et $f^m\circ g^p\circ f^n\circ g^q = f^{m+n}\circ g^{p+q} = g^{p+q}\circ f^{m+n}$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}, (f+g)^n = (f+g)\circ(f+g)\circ\dots\circ(f+g) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^k\circ g^{n-k}$ =$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\ \underbrace{f^k g^{n-k}}_{f\circ f\circ..\circ f\circ g\circ g\circ\dots\circ g}\quad (FBN)$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}, f^{n+1} - g^{n+1} = (f-g)\circ(\sum_{k=0}^{n}f^k\circ g^{n-k})$=$(f-g)(\sum_{k=0}^{n}f^k g^{n-k})$. (Formule de factorisation)

II Noyau, image et rang.

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.
$Kerf = \{\vec{x} \in E/f(\vec{x}) = \overrightarrow{0_F}\}$. Autrement dit, $\vec{x} \in Kerf \Leftrightarrow \vec{x} \in E\ et\ f(\vec{x}) = \overrightarrow{0_F}$. $Kerf$ est un ss-e-v de E
$Imf = \{f(\vec{x})/\vec{x} \in E\}$. Autrement dit, $\vec{y} \in Imf \Leftrightarrow \exists\vec{x} \in E\ /\vec{y} = f(\vec{x})$. Imf est un ss-e-v de F.
$rg(f) = dim(Im(f))$.
$rg(f) \leq \min(dimE, dimF)$.
Si $\mathscr{B}$= $(\vec{e_i})_{i\in I}$ est une famille génératrice de E alors $f(\mathscr{B})$= $(f(\vec{e_i}))_{i\in I}$ est une famille génératrice de $Im(f)$ et $rg(f) = rg(f(\mathscr{B}))$.
Théorème du rang : Si $dimE < +\infty\ et\ \ f \in \mathscr{L}(E,F)$. alors $rg(f) + dimKer(f) = \dim(E)$.
Le ss e v H de E est <u>stable </u>par f lorsque $f(H) \subset H$ i.e. lorsque $\forall\vec{x} \in H, f(\vec{x}) \in H$ et dans ce cas, $f_H: \begin{pmatrix} H \to H \\ \vec{x} \mapsto f(\vec{x}) \end{pmatrix}$ est un endomorphisme de H appelé <u>l'endomorphisme induit</u> par f sur H .

III Application linéaire injective-surjective- bijective

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

- ✓ $f\ est\ injective \iff Ker(f) = \{\overrightarrow{O_E}\}$
- ✓ $f\ est\ surjective \iff Im(f) = F$
- ✓ $f\ est\ isomorphisme\ de\ E\ sur\ F \iff Ker(f) = \{\overrightarrow{O_E}\}\ et\ Im(f) = F$

Si $\mathscr{B} = (\overrightarrow{e_i})_{i\in I}$ est une base de E alors

- ✓ $f\ est\ injective \iff (f(\overrightarrow{e_i}))_{i\in I}$ est une famille libre
- ✓ $f\ est\ surjective \iff \left(f(\overrightarrow{e_i})\right)_{i\in I}$ est une famille génératrice de F
- ✓ $f\ est\ isomorphisme\ de\ E\ sur\ F \iff \left(f(\overrightarrow{e_i})\right)_{i\in I}$ est une base de F.

Si $dimE = dimF < +\infty$ alors f est un isomorphisme de E sur $F \iff f$ est injective $\iff f$ est surjective de E sur F.

Conséquences :

- ✓ Si E et F sont isomorphes alors $dimE = dimF$.
- ✓ $Si\ dimE = dimF < +\infty$ alors E et F sont isomorphes.

Question de cours : Savoir énoncer tout résultat de cours et savoir énoncer et démontrer les résultats suivants :

1) La formule de changement de bases pour les vecteurs.
2) Dans un K-e-v E de dimension finie, tout ss-e-v F de E admet un supplémentaire dans E.
3) La formule de Grassmann.
4) Soit $B=(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ une base du K-e-v E et $(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_n)$ une famille de vecteurs du K-e-v F . Démontrer qu'il existe une et une seule application linéaire f de E dans F telle que $\forall k \in [\![1, n]\!], f(\overrightarrow{e_k}) = \overrightarrow{y_k}$.
5) Soit f une application linéaire de E dans F. Le noyau de f est un ss-e-v de E et l'image de f est un ss-e-v de F.