Equations différentielles linéaires

I Généralités $K = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$. Un élément de K est appelé un scalaire .

1. Définitions

1 **Définition :**

- Une **équation différentielle linéaire d'ordre n ($edln$)** est une équation de la forme :

$$(E): \alpha_n(x)y^{(n)} + \alpha_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots . + \alpha_1(x)y' + \alpha_0(x)y = \gamma(x)$$

ou

$$(E): \alpha_n(x)y^{(n)}(x) + \alpha_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots . + \alpha_1(x)y'(x) + \alpha_0(x)y(x) = \gamma(x)$$

où $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_0, \gamma$ sont des fonctions connues , définies et continues sur un même intervalle J de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans K , α_n n'est pas la fonction nulle .
$\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_0$ sont appelées les **fonctions coefficients** et γ est la **fonction second membre.**
y est la **fonction inconnue**, y' sa fonction dérivée , y'' sa dérivée seconde, …., $y^{(n)}$ sa dérivée nième.
x est la variable d'intégration ou de dérivation.

- (E) est dite **à coefficients constants** lorsque les fonctions $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_0$ sont constantes.
- **L'équation homogène** associée à (E) est l'équation différentielle

$$(EH): \alpha_n(x)y^{(n)} + \alpha_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots . + \alpha_1(x)y' + \alpha_0(x)y = 0$$

(le second membre d'une équation homogène est nul…… on entend parfois, par abus, sans second membre).

- Soit I un intervalle inclus dans J (éventuellement $I = J$).

Une **solution** de(E) sur I est toute fonction f continue et dérivable n fois sur I , à valeurs dans K et telle que : pour tout x de I , $\alpha_n(x)f^{(n)}(x) + \alpha_{n-1}(x)f^{(n-1)}(x) + \cdots . + \alpha_1(x)f'(x) + \alpha_0(x)f(x) = \gamma(x)$.
La courbe d'une solution de (E) sur I s'appelle une **courbe intégrale** sur I.
On dit que f est une solution complexe (resp. réelle) lorsque f est à valeurs dans $\mathbb{C}$ (resp. $\mathbb{R}$).

- **Résoudre ou intégrer (E)** sur I c'est trouver toutes les solutions de (E) sur I .

2 **NB :** Puisque $I \subset J$, si f est solution de (E) sur J alors f est une solution de f sur I .
Lorsque les fonctions $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_0, \gamma$ sont à valeurs réelles (resp. complexes) et que rien n'est précisé dans l'énoncé, on cherche les solutions réelles (resp. complexes).

3 **Dans la suite, nous allons résoudre deux types d'équa. diff. linéaires particulières :**
les **équations différentielles linéaires d'ordre 1 de la forme $y' + a(x)y = d(x)$ puis de la forme $\alpha(x)y' + \beta(x)y = \gamma(x)$.**
les **équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants de la forme $ay'' + by' + cy = d(x)$.**

4 **Exemples :**

1) $(E)\ y'(x) = e^{ix}$ est une edl1. Les solutions de (E) sont toutes les primitives complexes de $(x \mapsto e^{ix})$, sont donc toutes les fonctions de la forme $\left(x \mapsto \frac{1}{i}e^{ix} + c\right)$ $tq\ c$ constante complexe.
2) $(E): y'' = 1$ est une edl2. Les solutions de (E) sont toutes les fonctions linéaires i.e. de la forme $(x \mapsto ux + v)$ $tq\ u\ et\ v$ constantes réelles.
3) Les équations différentielles $(E_1): xy'(x) + (y(x))^2 = 0$, $(E_2): y(x) + \ln(y'(x)) = 0$ et $(E_3): y'(x)y(x) = x$ sont d'ordre 1 (car elles ne font intervenir que $y\ et\ y'$) mais ne sont pas linéaires (car elles contiennent y^2 , $ln(y')\ ou\ y' \times y$).On ne résoudra pas ces équations différentielles dans ce chapitre . Vous le ferez en chimie .
Voici la technique :

- Si y ne s'annule pas sur I , intervalle ne contenant pas 0 , alors
y est solution de (E_1)sur I $\Leftrightarrow \forall x \in I, \underbrace{\frac{y'(x)}{(y(x))^2}}_{\text{dérivée de} -\frac{1}{y(x)}} = \underbrace{-\frac{1}{x}}_{\text{dérivée de} -ln|x|} \underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{\text{deux primitves} \\ \text{d'une même fonction} \\ \text{sur un interavlle} \\ \text{diffèrent d'une cste}}} \exists c \in \frac{\mathbb{R}}{\forall x} \in I\ \frac{-1}{y(x)} = -ln|x| + c$ est solution de (E_1)sur I
y est solution de (E_1)sur I $\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}/\forall x \in I , y(x) = \frac{1}{ln|x| - c}$.En chimie , la résolution est terminée . En maths , on devra trouver une relation entre c et I et traiter le cas où y s'annule.
- On remarque que pour que y soit solution de (E_2), il faut que $y' > 0$ ie y strictement croissante . Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ sur lequel y est dérivable et strictement croissante.
y solution de (E_2) $sur\ I$ $\Leftrightarrow \forall x \in I, y(x) + \ln\big(y'(x)\big) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in I, e^{-y(x)} = y'(x)$
$\Leftrightarrow \forall x \in I, y'(x)e^{y(x)} = 1 \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}/\forall x \in I , e^{y(x)} = x + c \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}/\forall x \in I , y(x) = \ln(x + c)$
- y solution de (E_3) $sur\ I$ $\Leftrightarrow \forall x \in I, y(x)y'(x) = x \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in I , \frac{(y(x))^2}{2} = \frac{x^2}{2} + c \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}/\forall x \in I , |y(x)| = \sqrt{\frac{x^2}{2} + c}.$
En chimie , selon le signe de votre fonction inconnue y , vous choisirez $y(x) = \pm\sqrt{\frac{x^2}{2} + c}.$
En maths pour trouver toutes les solutions , nous devons discuter …..et c'est compliqué

4) En informatique , **la méthode d'Euler** , par exemple, permet une résolution numérique de la plupart des équations différentielles linéaires ou non .

2. Propriétés

5 Considérons l' **équation différentielle** **linéaire** **d'ordre n** suivante :

$$(E): \alpha_n(x)y^{(n)} + \alpha_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots. + \alpha_1(x)y' + \alpha_0(x)y = \gamma(x)$$

où $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_0, \gamma$ sont des fonctions connues , définies et continues sur un même intervalle J de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans K.

$$(EH): \alpha_n(x)y^{(n)} + \alpha_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots. + \alpha_1(x)y' + \alpha_0(x)y = 0$$

6 **Proposition :**

- (EH) admet toujours une solution : la fonction nulle.
- Toute combinaison linéaire de deux solutions de (EH) est solution de (EH) .

7 **Proposition de Principe de superposition :** Si f_1 est solution de $(E_1) : y' + a(x)y = d_1(x)$ et f_2 est solution de $(E_2) : y' + a(x)y = d_2(x)$ alors $f = f_1 + f_2$ est solution de $(E) : y' + a(x)y = d_1(x) + d_2(x)$.

8 **Proposition de Passage en complexe:**
On suppose ici que $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_0$ **sont à valeurs réelles** et γ est à valeurs complexes. On note

$$(E_r): \alpha_n(x)y^{(n)} + \alpha_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots. + \alpha_1(x)y' + \alpha_0(x)y = Re(\gamma(x))$$
$$(E_c): \alpha_n(x)y^{(n)} + \alpha_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots. + \alpha_1(x)y' + \alpha_0(x)y = Im(\gamma(x))$$

Alors , f est solution de $(E) \Leftrightarrow \begin{cases} Re(f) \text{ est solution de } (E_r) \\ \text{et} \\ Im(f) \text{ est solution de } (E_i) \end{cases}$

9 **Proposition de régularité des solutions :** Soit $I \subset J$.
Si f est une solution de (E) sur I et α_n ne s'annule pas sur I alors f est de classe C^n sur I **.**

10 **Théorème fondamental ($TFedl$)de résolution d'une équation différentielle linéaire:** Si f_0 est une solution particulière de (E) alors les solutions de (E) sur J sont toutes les fonctions de la forme $f_0 + \varphi$ où φ est solution de (EH) sur J .

II Equations différentielles linéaires d'ordre 1

11 Soit $(E) : \alpha(x)y' + \beta(x)y = \gamma(x)$ où α, β, γ sont continues sur l'intervalle J et sont à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Les théorèmes de résolution ne sont valables que sur un intervalle sur lequel α ne s'annule pas.

pour résoudre (E) sur J , intervalle sur lequel α s'annule :

1. On résout (E) sur tout intervalle I inclus dans J , sur lequel α ne s'annule pas et le plus grand possible .

Sur cet intervalle I , l'équation (E) s'écrit : $y' + \underbrace{\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}}_{a(x)} y = \underbrace{\frac{\gamma(x)}{\alpha(x)}}_{d(x)}$.

Autrement dit , sur I , $(E): y' + a(x)y = d(x)$ et $(EH): y' + a(x)y = 0$ où $a: I \to K$ et $d: I \to K$ sont continues.
La résolution de (E) sur I est traitée dans la suite du cours partie A.

2. On fait des raccords par continuité et dérivabilité aux points où s'annule la fonction α (partie B).

Une **solution réelle (resp. complexe)** de (E) sur J est toute fonction f définie, continue et dérivable sur J, à valeurs dans $\mathbb{R}$ (resp.$\mathbb{C}$) et telle que : pour tout x de J ,$\alpha(x)f'(x) + \beta(x)f(x) = \gamma(x)$.

12 **Partie A : On considère un intervalle I inclus dans J sur lequel α ne s'annule pas.**
Alors sur I, (E) et (EH) s'écrivent :

$$(E) : y' + a(x)y = d(x) \qquad \text{et} \qquad (EH) : y' + a(x)y = 0$$

où a et d sont des fonctions continues sur I et à valeurs dans K.

Une **solution réelle (resp. complexe)** de (E) sur I est toute fonction f définie, continue et dérivable sur I , à valeurs dans $\mathbb{R}$ (resp.$\mathbb{C}$) et telle que : pour tout x de I, $f'(x) + a(x)f(x) = d(x)$.

13 **Méthode pour résoudre $(E) : y' + a(x)y = d(x)$ sur I** :
1. Résoudre $(EH) : y' + a(x)y = 0$.
2. Trouver une solution particulière f_0 de (E) .
3. Conclure en appliquant le théorème fondamental de résolution d'une équa. diff. linéaire ($TFedl$).

1. Résolution de (EH): $y' + a(x)y = 0$.

14 **Théorème fondamental de résolution (1) de (EH) :** (EH): $y' + a(x)y = 0$. Soit A une primitive de a sur I . Alors les solutions de (EH) sur I sont toutes les fonctions $\left(x \to ke^{-A(x)}\right)$ telles que $k \in K$, k constante indépendante de x .

15 **NB**: $\left\{\left(x \to -k'e^{-A(x)}\right) / \ k' \in K\right\} = \left\{\left(x \to 7k''e^{-A(x)}\right) / \ k'' \in K\right\} = \left\{\left(x \to ke^{-A(x)}\right) / \ k \in K\right\}$.

16 **Méthode pour résoudre (EH): $y' + a(x)y = 0$ sur I :**
1) On cherche une primitive A de a sur I (intervalle sur lequel a est continue).
2) On simplifie si possible $e^{-A(x)}$ en utilisant : $e^{\delta ln(u(x))} = e^{\ln((u(x)^{\delta})} = u(x)^{\delta}$.
3) On applique le théorème de résolution de (EH).

17 **Exemples :**

1) Résolvons l'équation différentielle : $\underbrace{e^x}_{\alpha(x)} y' \underbrace{-x}_{\beta(x)} y = 0$ sur $\mathbb{R}$. La fonction exponentielle ne s'annulant jamais, (E) s'écrit : $y' \underbrace{-xe^{-x}}_{a(x)} y = 0$.
(E) est homogène et a: $(x \to -xe^{-x})$est continue sur $\mathbb{R}$ donc le théorème précédent s'applique sur tout $I = \mathbb{R}$.
Cherchons une primitive de a : F: $(x \to \int_0^x -te^{-t}dt)$est la primitive de a sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0 . Cherchons une autre expression de $F(x)$:
$F(x) = \int_0^x -te^{-t}dt = [te^{-t}]_0^x - \int_0^x e^{-t}dt = xe^{-x} + e^{-x} - 1$.
Ainsi F: $(x \to xe^{-x} + e^{-x} - 1)$ est une primitive de a . Donc $A = F + 1$ en est une autre . Alors $A(x) = (x+1)e^{-x}$ et $e^{-A(x)} = e^{-(x+1)e^{-x}}$.
Ainsi , les solutions de (EH) sont toutes les applications $(x \to ke^{-(x+1)e^{-x}})$ telles que k constante .

2) Résolvons l'équation différentielle : $\underbrace{\cos(x)}_{\alpha(x)} y' \underbrace{-\sin(x)}_{\beta(x)} y = \underbrace{\sin(2x) - \sin(x)}_{\gamma(x)}$ sur $I = \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$. Sur I , α ne s'annule pas donc (E) s'écrit :
$y' \underbrace{-\tan(x)}_{a(x)} y = \underbrace{2\sin(x) - \tan(x)}_{d(x)}$ et (EH) s'écrit : $y' - \tan(x)y = 0$. a et d sont continues sur I .
Résolution de (EH): A : $(x \mapsto ln|\cos(x)|)$ est une primitive de a sur I
et $\forall x \in I, e^{-A(x)} = e^{-ln|\cos(x)|} \underbrace{=}_{\forall x \in I, \cos(x)>0} e^{ln\left(\frac{1}{\cos(x)}\right)} = \frac{1}{\cos(x)}$. Donc les solutions de (EH) sur I sont toutes les fonctions de la forme
$\left(x \mapsto \frac{k}{\cos(x)}\right)$telles que k constante réelle.
Recherche d'une solution particulière : f_1: $(x \mapsto -\cos(x))$ est une solution particulière de $\cos(x)\,y' - \sin(x)\,y = \sin(2x)$ et f_2: $(x \mapsto 1)$ est une solution particulière de $\cos(x)\,y' - \sin(x)\,y = -\sin(x)$. Donc , $f = f_1 + f_2$ ie f: $(x \mapsto 1 - \cos(x))$ est une solution particulière de (E) par le principe de superposition.
Conclusion:Les solutions de (E) sont toutes les fonctions de la forme $\left(x \mapsto 1 - \cos(x) + \frac{k}{\cos(x)}\right)$telles que k constante réelle.

18 **Exemple important** : Soit $m \in K$ fixé (cste). Les solutions de (EH) : $y' + my = 0$ sur $\mathbb{R}$ sont toutes les fonctions $(x \to ke^{-mx})$tel que $k \in K$, k constante indépendante de x .

19 **Théorème de résolution (2) de (EH) : Si** φ_0 est une solution non nulle de(EH): $y' + a(x)y = 0$ sur I , alors les solutions de (EH) sur I sont toutes les fonctions $(x \to k\varphi_0(x))$ telles que $k \in K$, k constante indépendante de x .

20 **NB** : si je trouve une solution particulière évidente de (EH)sur I , les autres solutions de (EH) sont les fonctions colinéaires à cette solution particulière .

21 **Exemple** :Résolvons (EH): $cos(x)y' + sin(x)y = 0$ sur $I = \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. (EH) est une $edlh1$, cos ne s'annule pas sur I , cos et sin sont continues sur I . De plus, cos est une solution évidente de (EH) sur I. Donc les solutions de (EH) sur I sont toutes les fonctions de la forme $k \times cos$ telles que k $cste$ $réelle$.

2. Recherche d'une solution particulière. Méthode de variation de la constante.

a. Méthode générale

22 **Méthode pour rechercher une solution particulière de (E) : $y' + a(x)y = d(x)$ sur I**
1) Chercher une **solution évidente** (notamment une fonction constante).
2) **Essayer « n'importe quoi » .....enfin plutôt de la forme du second membre** (si d est polynomiale, resp. exponentielle , chercher une solution polynomiale, resp. exponentielle ...) !! Mais ce n'est pas sûr d'aboutir ! On peut superposer ou passer en complexe .
3) Appliquer la **méthode de variation de la constante** expliquée ci-dessous.

23 **Exemple :** Résoudre (E) : $y'(x) + iy(x) = e^{ix}$. (E) est une $edl1$ à coefficients constants et second membre continue sur $\mathbb{R}$.
I.Résolution de (EH) : Les solutions de (EH) : $y' + iy = 0$ sont toutes les fonctions $\left(x \to ke^{-ix}\right)$ tel que $k \in \mathbb{C}$,k cste.
II.Recherche d'une SP de (E) : Je cherche une SPde la forme $f(x) = ce^{ix}avec\ c$ cste complexe . On a alors f dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = cie^{ix}$.
Donc, f solution de (E) sur $\mathbb{R}$ **si etssi** $\forall x \in \mathbb{R}, cie^{ix} + ice^{ix} = e^{ix}$**si etssi** $\forall x \in \mathbb{R}, 2cie^{ix} = e^{ix}$**si etssi** $\forall x \in \mathbb{R}, 2ci = 1$ **si etssi** $c = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2}$
Donc, $f_0(x \mapsto -\frac{1}{2}ie^{ix})$ est une SPde (E)
III.CCL : Les solutions de (E) : $y' + iy = e^{ix}$ sont toutes les fonctions $\left(x \to ke^{-ix} + \frac{1}{2i}e^{ix}\right)$ tq $k \in \mathbb{C}$, k indépendante de x.

24 **Exemple important** : Soit $(m,q) \in \mathrm{K}^2$ fixé (m, q cstes) et $(E): y' + my = q$
Si $m \neq 0$ alors les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont toutes les fonctions $\left(x \to ke^{-mx} + \frac{q}{m}\right)$tel que $k \in K$,k constante.
Si $m = 0$ alors les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont toutes les fonctions $(x \to qx + k)$tel que $k \in K$,k constante.

b. Méthode de variation de la constante (MVC) :

25 **Lemme** : Toute fonction f dérivable sur I peut toujours s'écrire sous la forme $f(x) = k(x)e^{-A(x)}$ où k fonction dérivable sur I . Il suffit pour cela de choisir k telle que $k(x) = f(x)e^{A(x)}$.

Pour appliquer cette méthode , il faut avoir préalablement résolu (EH).Les solutions de (EH) sont de la forme $\varphi(x) = \boldsymbol{k}e^{-A(x)}$ avec k constante .

26 La méthode de variation de la constante (MVC) consiste à chercher une solution particulière de (E) sur I sous la forme :
$f(x) = k(x)e^{-A(x)}$ où k fonction dérivable sur I . On obtient alors que :
$f: (x \mapsto k(x)e^{-A(x)})$ est solution de (E) sur I si et ssi k est une primitive de $g: \left(x \to d(x)e^{A(x)}\right)$ sur I .

NB : il est parfois nécessaire de faire une IPP ou un CV pour trouver une primitive de $g: (x \mapsto d(x)e^{A(x)})$ dans la recherche d'une solution particulière de (E) sur I.

27 **Théorème :** la méthode de variation de la constante permet toujours de trouver une solution particulière de(E)sur I et même de résoudre entièrement (E). (E) a donc toujours une solution particulière et toujours une infinité de solutions sur I .

28 **Exemples :**

1) Résolvons $(E): xy' + y = 1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. Sur $\mathbb{R}^{+*}$. $(E): y' + \underbrace{\frac{1}{x}}_{a(x)} y = \underbrace{\frac{1}{x}}_{d(x)}$. a et d sont continues sur $\mathbb{R}^{+*}$.

<u>I Résolution de (EH) :</u> $y' + \underbrace{\frac{1}{x}}_{a(x)} y = 0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. $A: (x \to lnx)$ est une primitive de a et $e^{-A(x)} = e^{-ln(x)} = e^{\ln\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{x}$. Donc les solutions de (EH) sur $\mathbb{R}^{+*}$ sont toutes les fonctions $\left(x \to \frac{k}{x}\right)$ telles que k constante réelle .

<u>II Recherche d'une solution particulière</u> : $f_0: (x \to 1)$ est une solution particulière évidente .

<u>III Conclusion</u> : les solutions de (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$ sont toutes les fonctions $\left(x \to 1 + \frac{k}{x}\right)$ telles que k constante réelle .

2) Résolvons $(E): \underbrace{(x^2+1)}_{\alpha(x)} y'(x) + \underbrace{x}_{\beta(x)} y(x) = \underbrace{1}_{\gamma(x)}$ sur $\mathbb{R}$. Sur $\mathbb{R}$,(E) s' écrit $y' + \underbrace{\frac{x}{1+x^2}}_{a(x)} y = \underbrace{\frac{1}{1+x^2}}_{d(x)}$. a et d sont continues sur $\mathbb{R}^{+*}$.

<u>I Résolution de (EH) :</u> $a(x) = \frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{2}\frac{2x}{1+x^2}$. $A: \left(x \to \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right)$ est une primitive de a et $\forall x > 0$,
$e^{-A(x)} = e^{-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)} = e^{\ln\left((1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\right)} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Donc les solutions de (EH) sur $\mathbb{R}$ sont toutes les fonctions $\left(x \to \frac{k}{\sqrt{1+x^2}}\right)$ telles que k constante réelle .

<u>II Recherche d'une solution particulière</u> : appliquons la MVC . Cherchons une SP de (E) sous la forme :
$f(x) = \frac{k(x)}{\sqrt{1+x^2}} = k(x)(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$ telle que k dérivable sur $\mathbb{R}$. Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = k'(x)(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} + k(x)\left(-\frac{1}{2}\right)2x(1+x^2)^{-\frac{3}{2}} = \frac{k'(x)}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{k(x)x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$. Alors ,
f est solution de (E) **si et ssi** $\forall x \in \mathbb{R}, (1+x^2)f'(x) + xf(x) = 1$.
si et ssi $\forall x \in \mathbb{R}, (1+x^2)\left(\frac{k'(x)}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{k(x)x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\right) + x\frac{k(x)}{\sqrt{1+x^2}} = 1$
si et ssi $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{1+x^2}\,k'(x) = 1$
si et ssi $\forall x \in \mathbb{R}, k'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
si etssi k est une primitive de $g : \left(x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$.

Prenons $k_0: \left(x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\right)$ est une primitive de g et donc $f_0: \left(x \mapsto \frac{ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}}\right)$ est une SP de (E).

<u>III Conclusion</u> : les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont toutes les fonctions $\left(x \to \frac{ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{k}{\sqrt{1+x^2}}\right)$ telles que k cste réelle .

3. Problème de Cauchy : edl1 avec conditions initiales

29 **Théorème de Cauchy-Lipschitz :**
Soit $(E): y' + a(x)y = d(x)$ où a et d sont continues sur l'intervalle I à valeurs dans K et a ne s'annule pas sur I.
Pour tout $x_0 \in I$ et $y_0 \in K$, il existe une et une seule solution f de (E) sur I telle que $f(x_0) = y_0$. f est l' unique solution du problème de Cauchy $\begin{cases} y' + a(x)y = d(x) \,, x \in I \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$.
Autrement dit , pour tout $(x_0, y_0) \in I \times K$, il existe une et une seule courbe intégrale passant par le point de coordonnées (x_0, y_0).

30 **Remarques** : Parfois (et notamment en physique) la condition initiale est remplacée par une condition limite : par exemple, $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = L_0$. Dans ce cas , on ne peut pas assurée l'existence ni l'unicité des solutions.

31 **Exemple :** Par définition, la seule solution de $(E): y' = \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$qui vérifie $y(1) = 0$ est la fonction logarithme népérien.

32 **Méthode pour résoudre un problème de Cauchy sur un intervalle I sur lequel α ne s'annule pas .**
1) Je cherche toutes les solutions de (E): je trouve toutes les fonctions de la forme $f_0(x) + ke^{-A(x)}$ tq k cste.
2) Je détermine la valeur de la constante k de sorte que : $f(x_0) = y_0$.

33 **Exemples : 1)** La solution de $(C): \begin{cases} y' + 5y = -1 \\ y(2) = 3 \end{cases}$ sur $\mathbb{R}$ est $\left(x \to \frac{16}{5}e^{-5(x-2)} - \frac{1}{5}\right)$.

2)Résolvons le problème de Cauchy $\begin{cases} xy'(x) + y(x) = 1 \; tq \; x \in \mathbb{R}^{+*} \\ y(1) = 0 \end{cases}$.

Les solutions de $(E): xy' + y = 1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ sont toutes les fonctions $\left(x \to 1 + \frac{k}{x}\right)$ telles que k constante réelle.

Et , $1 + \frac{k}{1} = 0 \Leftrightarrow k = -1$. Donc la fonction $\left(x \mapsto 1 - \frac{1}{x}\right)$est l'unique solution de ce problème de Cauchy.

ATTENTION : Sur un intervalle sur lequel α s'annule , un problème de Cauchy peut admettre plusieurs ou aucune solution.

34 Partie B. Résolution de (E) : $\alpha(x)y' + \beta(x)y = \gamma(x)$ sur J où α $s'annule$.

Exemples :

1) Résolvons (E) : $\underbrace{(x-1)}_{\alpha(x)} y' + \underbrace{x}_{\beta(x)} y = \underbrace{e^{-x}}_{\gamma(x)}$ $sur\ \mathbb{R}$.

(E) est une (edl1) à coefficients et second membre continues sur $J = \mathbb{R}$. α s'annule en 1 uniquement . Notons $I_1 =]-\infty; 1[$ et $I_2 =]1, +\infty[$.
f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$
$\Leftrightarrow f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie (E) sur $\mathbb{R}$
$\Leftrightarrow f$ est dérivable sur I_1, sur I_2 et en 1 et vérifie (E) sur I_1, sur I_2 et en 1
$\Leftrightarrow f$ est solution de (E) sur I_1, sur I_2 et est dérivable en 1 et vérifie (E) en 1.

A. Résolution de (E) sur I_1 et I_2.

Sur I_1 et I_2 ,(E) s'écrit : $y' + \underbrace{\frac{x}{x-1}}_{a(x)} y = \underbrace{\frac{1}{x-1}e^{-x}}_{d(x)}$ et (EH) : $y' + \frac{x}{x-1}y = 0$.

<u>I Résolution de (EH)</u>: sur I_1 et I_2, $a(x) = \frac{x}{x-1} = \frac{(x-1)+1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$. Donc , A: $(x \mapsto x + ln|x-1|)$ est une primitive de a sur

I_1 et I_2 et $e^{-A(x)} = e^{-(x+ln|x-1|)} = e^{-x}e^{-ln|x-1|} = e^{-x}e^{\ln\left(\frac{1}{|x-1|}\right)} = \frac{1}{|x-1|}e^{-x} = \begin{cases} \frac{1}{x-1}e^{-x} \; si \; x \in I_1 \\ \frac{1}{1-x}e^{-x} \; si \; x \in I_2 \end{cases}$.

Les solutions de (EH) sur I_1 sont toutes les fonctions $\left(x \mapsto \frac{k_1}{x-1}e^{-x}\right)$ telles que $k_1 \in \mathbb{R}$ $cste$

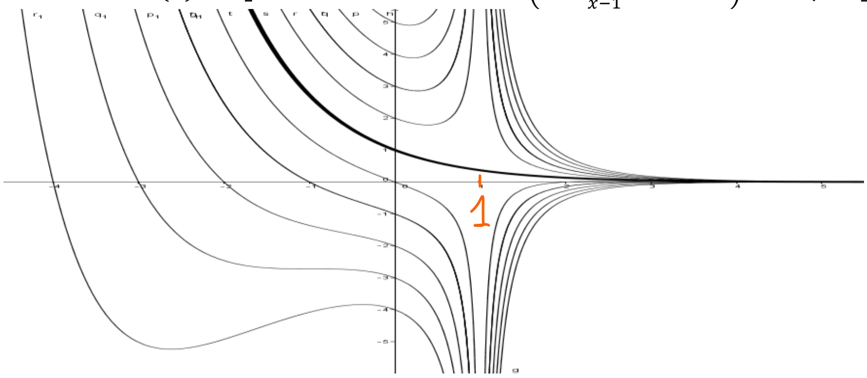
Les solutions de (EH) sur I_2 sont toutes les fonctions $\left(x \mapsto \frac{k_2}{1-x}e^{-x}\right)$ telles que $k_2 \in \mathbb{R}$ $cste$ ie toutes les fonctions $\left(x \mapsto \frac{k_2'}{x-1}e^{-x}\right)$ telles que $k_2' \in \mathbb{R}$ $cste$.

<u>II Solution particulière</u> : je remarque que f_0: $(x \mapsto e^{-x})$ est une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$ donc sur I_1 et I_2.

<u>III Conclusion :</u>

Les solutions de (E) sur I_1 sont toutes les fonctions $\left(x \mapsto \frac{k_1}{x-1}e^{-x} + e^{-x}\right)$ telles que $k_1 \in \mathbb{R}$ $cste$

Les solutions de (E) sur I_2 sont ie toutes les fonctions $\left(x \mapsto \frac{k_2}{x-1}e^{-x} + e^{-x}\right)$ telles que $k_2 \in \mathbb{R}$ $cste$.



Il semblerait que peu de solutions se raccordent par continuité en 1 . Seule la courbe en gras, raccord des deux solutions sur I_1 et I_2 correspondant à $k_1 = k_2 = 0$, convient . Mais toutes les fonctions ne sont pas tracées donc ce dessin n'est pas une démonstration.

B. Résolution de (E) sur $\mathbb{R}$: raccord en 1.

- <u>f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$</u> **si et ssi** f est solution de I_1 et sur I_2 et f est continue et dérivable et vérifie (E) en 1.

si etssi $\left[\begin{array}{l} \text{il existe } k_1 \text{ et } k_2 \text{ des cstes réelles telles que: } \forall x \in I_1, f(x) = \frac{k_1}{x-1}e^{-x} + e^{-x} \; et \; \forall x \in I_2, f(x) = \frac{k_2}{x-1}e^{-x} + e^{-x} \\ f \text{ est continue et dérivable en 1 et } 0 \times f'(1) + 1f(1) = e^{-1} \text{ i.e. } f(1) = \frac{1}{e} \end{array}\right.$.

- <u>Considérons</u> donc une fonction $f: x \mapsto \begin{cases} \frac{k_1}{x-1}e^{-x} + e^{-x} \; si \; x > 1 \\ \frac{1}{e} \; si \; x = 1 \\ \frac{k_2}{x-1}e^{-x} + e^{-x} \; si \; x < 1 \end{cases}$ où k_1 et k_2 sont des cstes réelles à déterminer de sorte que f soit continue et dérivable en 1. On a alors : f est continue en 1 **si et ssi** $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{k_1}{x-1}e^{-x}+e^{-x}=\frac{1}{e}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{k_2}{x-1}e^{-x}+e^{-x}$.

Or, $\lim\limits_{x\to1}\frac{k}{x-1}e^{-x}+e^{-x}=\begin{cases}\pm\infty\ si\ k\neq0\\ \frac{1}{e}\ si\ k=0\end{cases}$. Donc, f est continue en 1 si etssi $k_1=k_2=0$ **si et ssi** $f\ est\ (x\mapsto e^{-x})$.

De plus , $(x\mapsto e^{-x})$ est solution de (E).

C. Conclusion : $(x\mapsto e^{-x})$ est la seule solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

2) Résolvons (E): $\underbrace{x(x-1)}_{\alpha(x)}y'\underbrace{-(3x-1)}_{\beta(x)}y+\underbrace{x^2(x+1)}_{-\gamma(x)}=0\ sur\ \mathbb{R}$.

(E) est une (edl1) à coefficients et second membre continues sur J=$\mathbb{R}$. α s'annule en 1 et en 0 uniquement.

Notons $I_1=]-\infty;0[\,,I_2=]0,1[\ et I_3=]1,+\infty[$.

f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie (E) sur $\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow f$ est dérivable sur I_1, sur I_2 , sur I_3 , en 1 et en 0 et vérifie (E) sur I_1, sur I_2sur I_3 , en 0 et en 1

$\Leftrightarrow f$ est solution de (E) sur I_1, sur I_2 , sur I_3 et est dérivable en 1 et en 0 et vérifie (E) en 1 et en 0

A. Résolution de (E) sur I_1 , I_2 et I_3.

Sur I_1 , $I_2\ et\ I_3$, (E) s'écrit : $y'+\underbrace{\frac{-(3x-1)}{x(x-1)}}_{a(x)}y=\underbrace{\frac{-x(x+1)}{(x-1)}}_{d(x)}$ et (EH) : $y'+\frac{-(3x-1)}{x(x-1)}y=0$.

<u>I Résolution de (EH)</u>: sur I_1 , $I_2\ ou\ I_3$, $a(x)=\frac{-(3x-1)}{x(x-1)}=\frac{-3}{x-1}+\frac{1}{x(x-1)}$ et il existe $a\ et\ b$ réels tq :

$\forall x\in\mathbb{R}\backslash\{0,1\},\frac{1}{x(x-1)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x-1}$. On a $a=\lim\limits_{x\to0}a+\frac{bx}{x-1}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{x(x-1)}=-1$ et b $=\lim\limits_{x\to1}\frac{a(x-1)}{x}+\frac{b}{x}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x-1}{x(x-1)}=1\ et$ Donc , sur I_1 , $I_2\ et\ I_3$,

$a(x)=\frac{-(3x-1)}{x(x-1)}=\frac{-3}{x-1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{(x-1)}=-\left[\frac{1}{x}+\frac{2}{(x-1)}\right]\ et\ A$: $(x\mapsto -ln|x|-2ln|x-1|)$ est une primitive de a sur I_1 , $I_2\ ou\ I_3\ et\ e^{-A(x)}=$

$e^{-(-ln|x|-2ln|x-1|)}=e^{ln|x|}e^{\ln(|x-1|^2)}=|x|(x-1)^2=\begin{cases}-x(x-1)^2\ si\ x\in I_1\\ x(x-1)^2 si\ x\in I_2 ou\ I_3\end{cases}$.

Les solutions de (EH) sur I_1 sont toutes les fonctions $(x\mapsto -k_1{}'x(x-1)^2)$ telles que $k_1{}'\in\mathbb{R}\ cste$ i.e. toutes les fonctions $(x\mapsto k_1x(x-1)^2)$ telles que $k_1\in\mathbb{R}\ cste$ ie.

Les solutions de (EH) sur I_2 sont toutes les fonctions $(x\mapsto k_2x(x-1)^2)$ telles que $k_2\in\mathbb{R}\ cste$.

Les solutions de (EH) sur I_3 sont toutes les fonctions $(x\mapsto k_3x(x-1)^2)$ telles que $k_3\in\mathbb{R}\ cste$

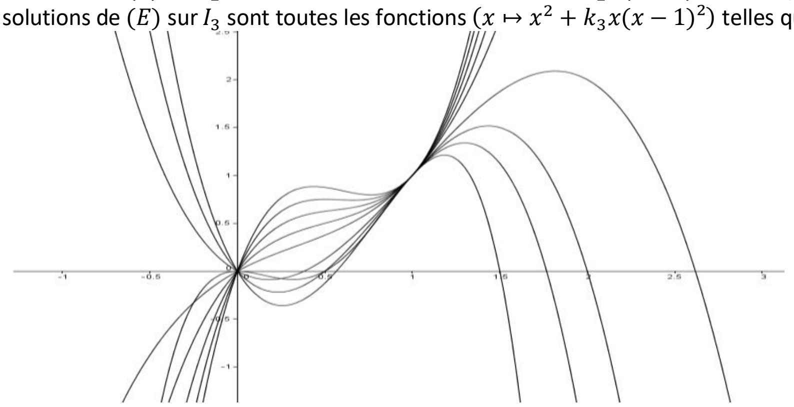
<u>II Solution particulière</u> : je remarque que f_0: $(x\mapsto x^2)$ est une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$ donc sur I_1 , $I_2\ et\ I_3$.

<u>III Conclusion :</u>

Les solutions de (E) sur I_1 sont toutes les fonctions $(x\mapsto x^2+k_1x(x-1)^2)$ telles que $k_1\in\mathbb{R}\ cste$.

Les solutions de (E) sur I_2 sont toutes les fonctions $(x\mapsto x^2+k_2x(x-1)^2)$ telles que $k_2\in\mathbb{R}\ cste$.

Les solutions de (E) sur I_3 sont toutes les fonctions $(x\mapsto x^2+k_3x(x-1)^2)$ telles que $k_3\in\mathbb{R}\ cste$.



Graphiquement , il semblerait que tous les raccords en 1 se passent toujours bien (ie raccord continue et dérivable en 1 quelles que soient les valeurs de $k_2$et k_3). Par contre en 0 , les raccords se passent bien en termes de continuité mais pour la dérivabilité il faut apparemment que $k_1=k_2$.

B. Résolution de (E) sur $\mathbb{R}$: raccords en 0 et en 1 .

- <u>f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$</u>

sietssi f est solution de $I_1\ et\ sur\ I_2\ et\ sur\ I_3$et f est continue et dérivable et vérifie (E) en 1 et en 0

sietssi $\begin{cases}\text{il existe } k_1,k_2 \text{ et } k_3 \text{ des cstes réelles telles que:}\\ \forall x\in I_1,f(x)=x^2+k_1x(x-1)^2\ et\ \forall x\in I_2,f(x)=x^2+k_2x(x-1)^2\ \ et\ \forall x\in I_3,f(x)=x^2+k_3x(x-1)^2\\ \text{et } f \text{ est continue et dérivable en 1 et } 0\times f'(1)-2f(1)+2=0 \text{ i.e. } f(1)=1 .\\ \text{et } f \text{ est continue et dérivable en 0 et } 0\times f'(0)+f(0)+0=0 \text{ i.e. } f(0)=0 .\end{cases}$

- <u>Considérons</u> donc une fonction $f:x\mapsto\begin{cases}x^2+k_1x(x-1)^2 & si\ x<0\\ 0 & si\ x=0\\ x^2+k_2x(x-1)^2 & si\ x\in]0,1[\\ 1 & si\ x=1\\ x^2+k_3x(x-1)^2 & si\ x>1\end{cases}$ où k_1 , k_2 et k_3 sont des cstes réelles à

déterminer de sorte que f soit continue et dérivable en 1 et en 0 .

<u>Remarque</u> : Lorsque $k_1=k_2=k_3$, la fonction est polynomiale d'expression $f(x)=x^2+kx(x-1)^2$ et est donc continue et dérivable en 0 et en 1 et est donc solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

<u>Continuité de f en 1</u> : f est continue en 1 **si et ssi** $\lim\limits_{x\to1^+}x^2+k_3x(x-1)^2\ \underbrace{=1=}_{TJRS\ VRAI}\ \lim\limits_{x\to1^-}x^2+k_2x(x-1)^2$.

Donc, pour toutes valeurs de $k_2\ et\ k_3$, f est continue en 1 .

<u>Continuité de f en 0</u> : f est continue en 0 **si et ssi** $\lim\limits_{x\to0^+}x^2+k_2x(x-1)^2\ \underbrace{=0=}_{TJRS\ VRAI}\ \lim\limits_{x\to0^-}x^2+k_1x(x-1)^2$.

Donc, pour toutes valeurs de $k_1\ et\ k_2$, f est continue en 0 .

Dérivabilité de f en 1 : f est dérivable en 1 **si et ssi** $\lim_{x\to1^+}\frac{x^2+k_3x(x-1)^2-1}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2+k_2x(x-1)^2-1}{x-1}\in\mathbb{R}$.
Or, $\frac{x^2+kx(x-1)^2-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x+1)+kx(x-1)^2}{x-1}=(x+1)+kx(x-1).Donc, \lim_{x\to1}\frac{x^2+kx(x-1)^2-1}{x-1}=2$. Par conséquent, $\lim_{x\to1^+}\frac{x^2+k_3x(x-1)^2-1}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2+k_2x(x-1)^2-1}{x-1}=2$ quelles que soient les valeurs de $k_2\ et\ k_3$.
Donc, pour toutes valeurs de $k_2\ et\ k_3$, f est dérivable en 1 et $f'(1)=2$.
Dérivabilité de f en 0 : f est dérivable en 0 **si et ssi** $\lim_{x\to0^+}\frac{x^2+k_2x(x-1)^2}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{x^2+k_1x(x-1)^2}{x}\in\mathbb{R}$.
Or, $\frac{x^2+kx(x-1)^2}{x}=x+k(x-1)^2.Donc, \lim_{x\to0}\frac{x^2+kx(x-1)^2}{x}=k$. Par conséquent, $\lim_{x\to0^+}\frac{x^2+k_2x(x-1)^2}{x}=k_2\ et\ \lim_{x\to0^-}\frac{x^2+k_1x(x-1)^2}{x}=k_1$. Donc, f est dérivable en 0 **sietssi** $k_1=k_2$.

C. Conclusion : Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont toutes les fonctions $\left(x\mapsto\begin{cases}x^2+k_1x(x-1)^2\ si\ x\le1\\x^2+k_3x(x-1)^2\ si\ x>1\end{cases}\right)$ où k_1 et k_3 cstes réelles

35 Graphiquement, faire un raccord en δ revient à trouver les courbes intégrales de (E) sur I_1 et celles sur I_2 qui se recollent par continuité et dérivabilité en δ.
Sur J, (E) peut avoir aucune, une ou une infinité de solutions.
NB : il est aussi parfois plus simple d'appliquer le *critère de dérivabilité* pour calculer la limite du taux d'accroissement dans l'étude de la dérivabilité au point de raccord. De plus, toutes les *techniques étudiées (+ les développements limités)* sont à votre disposition pour calculer les limites utiles dans l'étude du raccord.

III Equations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficient constants

36 **On considère ici l' équation différentielle linéaire d'ordre 2 $(edl2)$ à coefficients constants**
(E): $ay''+by'+cy=d(x)$ et son équation homogène associée (EH) : $ay''+by'+cy=0$
où a,b,c sont des **constantes**, éléments de K, $\boldsymbol{a}$ **non nul** et d est une fonction définie et continue sur un intervalle J de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans K. (a,b,c sont les coefficients et d est la fonction second membre)

37 **Exemples :** Les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E): $y''=0$ sont toutes les fonctions affines.
Les solutions réelles sur $\mathbb{R}^{+*}$ de (E): $y''=x^\alpha$, où α paramètre réel distinct de $-1\ et\ de\ -2$, sont toutes les fonctions de la forme $\left(x\mapsto\frac{x^{\alpha+2}}{(\alpha+2)(\alpha+1)}+ax+b\right)$ telles que $a\ et\ b$ constantes réelles.

38 **Remarque** : (E) peut toujours s'écrire sous la forme (E): $y''+\underbrace{\frac{b}{a}}_{B}y'+\underbrace{\frac{c}{a}}_{C}y=\underbrace{\frac{d(x)}{a}}_{D(x)}$ et (EH): $y''+By'+Cy=0$.

39 **Méthode :** pour résoudre (E), nous allons donc :
1. Résoudre (EH).
2. Trouver une solution particulière f_0 de (E).
3. Conclure en appliquant le théorème fondamental de résolution d'une équa. diff. linéaire $(TFedl)$.

1. Résolution de $(\boldsymbol{EH})$

NB : on peut toujours résoudre $(\boldsymbol{EH})$ sur $\mathbb{R}$.

40 **Théorème fondamental de résolution de (EH) :**
Soit (EH): $ay''(x)+by'(x)+cy(x)=0$ où $a, b\ c\ \ constantes$ complexes ou réelles et a non nulle.
Soit $(e.c): ar^2+br+c=0$ appelée **équation caractéristique** de (EH) de discriminant $\boldsymbol{\Delta}$.
NB : $(e.c)$ est donc une équation polynomiale de degré 2 à coefficients réels ou complexes **d'inconnue $\boldsymbol{r}$ réelle ou complexe**).

A. Solutions complexes (cas où $\boldsymbol{a,b,c}$ sont réels ou complexes et l'inconnue $\boldsymbol{y}$ est à valeurs complexes).

si Δ≠0, notons r_1 et r_2 les deux solutions complexes distinctes de $(e.c)$. Alors, les solutions de (EH) sont toutes les fonctions de la forme $\begin{pmatrix}\mathbb{R}\to\mathbb{C}\\x\mapsto Ue^{r_1x}+Ve^{r_2x}\end{pmatrix}$ telles que $U\ et\ V$ constantes complexes.

si Δ=0, notons r_0 la seule solution (double) de $(e.c)$. Alors, les solutions de (EH) sont toutes les fonctions de la forme $\begin{pmatrix}\mathbb{R}\to\mathbb{C}\\x\mapsto(Ux+V)e^{r_0x}\end{pmatrix}$ telles que $U\ et\ V$ constantes complexes.

B. Solutions réelles (cas où $\boldsymbol{a, b, c}$ sont des réels et l'inconnue $\boldsymbol{y}$ est à valeurs réelles)

si Δ>0, notons r_1 et r_2 les deux solutions réelles de $(e.c)$. Alors, les solutions (réelles) de (EH) sont toutes les fonctions de la forme $\begin{pmatrix}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\x\mapsto Ue^{r_1x}+Ve^{r_2x}\end{pmatrix}$ telles que $U\ et\ V$ constantes réelles.

si Δ=0, notons r_0 la seule solution (double) de $(e.c)$. Alors, les solutions (réelles) de (EH) sont toutes les fonctions de la forme $\begin{pmatrix}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\x\mapsto(Ux+V)e^{r_0x}\end{pmatrix}$ telles que $U\ et\ V$ constantes réelles.

si Δ<0, notons $r=\rho+i\omega$ et $\bar{r}=\rho-i\omega$ (où $\rho\ et\ \omega$ réels) les deux racines complexes non réelles conjuguées de $(e.c)$
Alors, les solutions(réelles) de (EH) sont toutes les fonctions de la forme $\begin{pmatrix}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\x\mapsto(U\cos(\omega x)+V\sin(\omega x))e^{\rho x}\end{pmatrix}$ telles que $U\ et\ V$ constantes réelles.

41 **Exemples :**

1) Résoudre $(E) : y'' + y' + y = x + 1$.

•Résolution de (EH): $y'' + y' + y = 0$. Posons $(e.c)$: $r^2 + r + 1 = 0$. Les solutions de (e.c) sont $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ $et\ \bar{j}$. Donc les solutions réelles de (EH) sont toutes les applications de la forme $\begin{pmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \left(U\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + V\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)e^{-\frac{x}{2}} \end{pmatrix}$ telles que U et V constantes réelles.

•La fonction $(x \mapsto x)$ est une solution particulière de (E).

Ainsi, les solutions réelles de (E) sont toutes les applications c

2) Résoudre (EH): $my'' + (1 + m^2)y' + my = 0$ $où\ m\ paramètre\ réel$.

<u>1er cas : $m = 0$.</u> Alors (EH) : $y' = 0$ est une $edl1$ homogène. Les solutions réelles de (EH) sont toutes les fonctions constantes réelles.

<u>2ème cas $m \neq 0$.</u> Alors (EH) est une $edl2$ homogène.

Posons $(e.c)$: $mr^2 + (1 + m^2)r + m = 0$ et $\Delta = (1 + m^2)^2 - 4m^2 = (1 - m^2)^2$.

<u>1er sous-cas : $m \neq +1$ et $m \neq 0$</u> . Alors, $r_1 = \frac{-(1+m^2)+(1-m^2)}{2m} = -m$ et $r_2 = \frac{-(1+m^2)-(1-m^2)}{2m} = -\frac{1}{m}$ sont deux solutions réelles et distinctes de $(e.c)$. Les solutions réelles de (EH) sont toutes les fonctions de la forme $\begin{pmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \left(Ue^{-\frac{x}{m}} + Ve^{-mx}\right) \end{pmatrix}$ telles que U et V constantes réelles.

<u>2ème sous-cas : $m = 1$</u> . Alors, $r_0 = -1$ est l'unique solution de $(e.c)$. Les solutions réelles de (EH) sont toutes les fonctions de la forme $\begin{pmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto (U + Vx)e^{-x} \end{pmatrix}$ telles que U et V constantes réelles.

<u>3ème sous-cas : $m = -1$</u> . Alors, $r_0 = 1$ est l'unique solution de $(e.c)$. Les solutions réelles de (EH) sont toutes les fonctions de la forme $\begin{pmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto (U + Vx)e^{x} \end{pmatrix}$ telles que U et V constantes réelles.

42 **<u>Exemples fondamentaux : Soit ω une constante réelle et non nulle</u>.**

Les solutions (réelles) de $\boldsymbol{y'' = 0}$ sont toutes les applications de la forme $\begin{pmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto Ux + V \end{pmatrix}$ telles que U et V constantes réelles.

Les solutions(réelles) de $\boldsymbol{y'' + \omega^2 y = 0}$ sont toutes les applications de la forme $\begin{pmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto U\cos(\omega x) + V\sin(\omega x) \end{pmatrix}$ telles que U et V constantes réelles ou encore de manière équivalente toutes les applications de la forme $\begin{pmatrix} \mathbb{R} \to K \\ x \mapsto W\,\mathrm{ch}(\omega x + \Omega) \end{pmatrix}$ telles que W et Ω constantes réelles.

Les solutions(réelles) de $\boldsymbol{y'' - \omega^2 y = 0}$ sont toutes les applications de la forme $\begin{pmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto Ue^{\omega x} + Ve^{-\omega x} \end{pmatrix}$ telles que U et V constantes réelles ou encore de manière équivalente toutes les applications de la forme $\begin{pmatrix} \mathbb{R} \to K \\ x \mapsto U\,\mathrm{ch}(\omega x) + V\mathrm{sh}(\omega x) \end{pmatrix}$ telles que U et V constantes réelles.

43 **Remarques :**

1. $U\cos(\omega x) + V\sin(\omega x) = W\cos(\omega x - \varphi)$ avec $W = \sqrt{U^2 + V^2}$ et $\varphi = Arctan\left(\frac{V}{U}\right)[\pi]$.
2. Les constantes U et V se déterminent, dans un deuxième temps, grâce aux conditions initiales vérifiées par y . L'énoncé donne souvent les valeurs $y(x_0)$ et $y'(x_0)$ où x_0 est un réel connu . On pourra aussi utiliser le comportement de y à l'infini Deux relations contenant U et V suffisent , le plus souvent, à déterminer U et V.
3. Les solutions de $(e.c)$ sont les solutions de $r^2 + Br + C = 0$.

2. <u>Recherche d'une solution particulière de (E) .</u>

a. <u>Méthode</u>

44
1. On cherche une SP évidente (fonction constante ??)
2. On essaie de trouver une solution particulière sous la forme du second membre .
3. On reconnait une forme ci-dessous en $d(x)$ et on applique l'une des méthodes suivantes.

b. $d(x) = P(x)e^{Mx}$ <u>où M réel ou complexe et P fonction polynomiale à coeff. réels ou complexes.</u>

d est continue sur tout $\mathbb{R}$, je vais chercher une solution particulière de (E) sur tout $\mathbb{R}$.

45 **Méthode :**

Si M n'est pas solution de $(e.c)$,alors on cherche une solution particulière de (E) sous la forme $f(x) = Q(x)e^{Mx}$ avec Q polynomiale à coefficients réels (resp. complexes) et $degQ = degP$.

Si M est solution simple de $(e.c)$,alors on cherche une solution particulière de (E) sous la forme $f(x) = Q(x)e^{Mx}$ avec Q polynôme à coefficients réels (resp. complexes) et $degQ = degP + 1$.

Si M est solution double de$(e.c)$, alors on cherche une solution particulière de (E) sous la forme $f(x) = Q(x)e^{Mx}$ avec Q polynôme à coefficients réels (resp. complexes) et $degQ = degP + 2$.

46 **On admet que cette recherche aboutit toujours** . On peut alors assurer que : lorsque le second membre est du type $d(x) = P(x)e^{Mx}$, alors (E) admet toujours une solution particulière sur $\mathbb{R}$ et donc une infinité de solutions.

47 **Remarque :** En utilisant la méthode superposition on traite ici toutes les équations avec second membre de la forme polynôme$\times$ ch (ou sh). Grâce à la FBN, on sait aussi trouver une SP lorsque le second membre de la forme polynôme$\times$ ch^k (ou sh^k).

48 **Exemple :**

1. Résolvons $(E) : y'' - 3y' + 2y = (2x-1)exp(x)$.

•Résolution de $(EH): y'' - 3y' + 2y = 0$. Posons $(e.c): r^2 - 3r + 2 = 0$. Les solutions de (e.c) sont 1 et 2. distinctes et réelles. Donc les solutions réelles de (EH) sont toutes les applications de la forme $\begin{pmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto (Ue^x + Ve^{2x}) \end{pmatrix}$ telles que U et V constantes réelles.

•Solution particulière de (E) : le second membre $d(x) = (2x-1)e^x = P(x)e^{Mx}$. $P(x \mapsto 2x-1)$ est polynomile de degré 1 et $M = 1$est racine simple de $(e.c)$. Je cherche donc une solution particulière de (E) sous la forme $f(x) = Q(x)e^x$ avec Q polynomiale de degré 2 i.e. $f(x) = (ux^2 + vx + w)e^x$ où u, v et w sont des constantes réelles à déterminer pour que f soit solution de (E). Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} f(x) = (ux^2 + vx + w)e^x \\ f'(x) = (ux^2 + vx + w + 2ux + v)e^x \\ f''(x) = (ux^2 + vx + w + 4ux + 2v + 2u)e^x \end{cases}.$$

Alors , f solution de (E)

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = (2x-1)e^x$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, ((-2u)x - v + 2u)e^x = (2x-1)e^x$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, ((-2u + 2v)x - v + 2u) = (2x-1)$

$\Leftarrow \begin{cases} -2u = 2 \\ -v + 2u = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -1 \\ v = -1 \end{cases}$ et w quelconque.

Donc, $f: (x \mapsto (x^2 - x)e^x)$ est une solution particulière de (E).

•Conclusion : les solutions réelles de (E) sont toutes les applications de la forme $\begin{pmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto (x^2 - x)e^x + (Ue^x + Ve^{2x}) \end{pmatrix}$ telles que U et V constantes réelles.

c. $d(x) = P(x)\cos(px)\, e^{mx} = Re\left(P(x)e^{(m+iq)x}\right)$ ou $d(x) = P(x)\sin(px)\, e^{mx} = Im\left(P(x)e^{(m+iq)x}\right)$ où P polynomiale à coefficients réels et q et m constantes réelles.

49 **Méthode :**

1. On introduit $(E_c): ay'' + by' + cy = P(x)e^{(m+iq)x}$. On pose $M = m + iq$.
2. On cherche une solution particulière f_c de (E_c) avec la méthode précédente.
3. Alors $Re(f_c)$ est une solution particulière de $ay'' + by' + cy = P(x)\cos(px)\, e^{mx}$

$et\ Im(f_c)$ est une solution particulière de $ay'' + by' + cy = P(x)sin(px)e^{mx}$

50 **Exemple :** Résolvons $(E): y'' - 2y' + 5y = x\cos(2x)e^x$

•Résolution de $(EH): y'' - 2y' + 5y = 0$. Posons $(e.c): r^2 - 2r + 5 = 0$ et $\Delta = -16 = (4i)^2$. Les solutions de (e.c) sont $1 - 2i$ et $1 + 2i$.

Donc les solutions réelles de (EH) sont toutes les applications de la forme $\begin{pmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto (U(\cos(2x) + Vsin(2x))e^x \end{pmatrix}$ où U et V constantes réelles.

•Solution particulière de (E) : le second membre $d(x) = x\cos(2x)\, e^x = Re\left(xe^{(1+2i)x}\right) = Re(P(x)e^{Mx})$. Passons en complexe :

Posons $(E_c): y'' - 2y' + 5y = xe^{(1+2i)x}$

$P(x \mapsto x)$ est polynomiale de degré 1 et $M = 1 + 2i$ est racine simple de $(e.c)$. Je cherche donc une solution particulière de (E_c) sous la forme $f(x) = Q(x)e^x$ avec Q polynomiale de degré 2 i.e. $f(x) = (ux^2 + vx + w)e^{(1+2i)x}$ où u, v et w sont des constantes **complexes** à déterminer pour que f soit solution de (E_c). Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$f(x) = (ux^2 + vx + w)e^{(1+2i)x}$

$f'(x) = ((1+2i)ux^2 + (1+2i)vx + (1+2i)w + 2ux + v)e^{(1+2i)x}$

$f''(x) = ((-3+4i)ux^2 + (-3+4i)vx + (-3+4i)w + (4(1+2i))ux + 2(1+2i)v + 2u)e^{(1+2i)x}$.

Alors , f solution de $(E) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f''(x) - 2f'(x) + 5f(x) = xe^{(1+2i)x}$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, (4(1+2i) - 4)ux + 4iv + 2u)e^{(1+2i)x} = xe^{(1+2i)x} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, (8i)ux + 4iv + 2u = x$

$\Leftarrow \begin{cases} (8i)u = 1 \\ 4iv + 2u = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{1}{8i} = -\frac{1}{8}i \\ v = \frac{1}{16} \end{cases}$ et w quelconque.

Ainsi, $f_c: \left(x \mapsto \left(-\frac{1}{8}ix^2 + \frac{1}{16}x\right)e^{(1+2i)x}\right)$ est une solution particulière de (E_c). Donc $f_0 = Re(f_c)$ est une solution particulière de (E).

Or, $\left(-\frac{1}{8}ix^2 + \frac{1}{16}x\right)e^{(1+2i)x} = \left(-\frac{1}{8}ix^2 + \frac{1}{16}x\right)(\cos(2x) + isin(2x))e^x = \left[\frac{\sin(2x)x^2}{8} + \frac{cos(2x)x}{16} + i\left(-\frac{\cos(2x)x^2}{8} + \frac{\sin(2x)x}{16}\right)\right]e^x$

Donc, $f_0: \left(x \mapsto \left(\frac{\sin(2x)x^2}{8} + \frac{cos(2x)x}{16}\right)e^x\right)$ est une solution particulière de (E).

•Conclusion : les solutions réelles de (E) sont toutes les applications de la forme

$\begin{pmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \left(\frac{\sin(2x)x^2}{8} + \frac{cos(2x)x}{16}\right)e^x + (Ucos(2x) + Vsin(2x))e^x \end{pmatrix}$ telles que U et V constantes réelles.

Cas particulier

51 **Théorème** Soit $(E): ay'' + by' + cy = sin(qx)$ ou $(E): ay'' + by' + cy = cos(qx)$ où a, b, c, q réels et $a \neq 0$.

- Si $m = iq$ n'est pas solution de $(e.c)$,alors (E) aura une solution particulière de la forme $f(x) = Acos(qx) + Bsin(qx)$ avec A, B $réels$.
- Si $m = iq$ est solution simple de $(e.c)$,alors (E) aura une solution particulière de la forme $f(x) = (Ax + B)\cos(qx) + (Cx + D)\sin(qx)$ avec A, B, C et D $réels$.

52 **Exemple :** Résolvons $(E) : y'' + y = cos(x)$.
Les solutions réelles de(EH)sont toutes les fonctions de la forme $(x \mapsto Ucos(x) + Bsin(x))$ où U et V constantes réelles.
Comme i est racine simple de $(e.c)$, (E) admet une SP de la forme $f_0(x) = (Ax + B)\cos(x) + (Cx + D)\sin(x)$ où A,B,C,D constantes réelles à déterminer. f_0 est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} f_0(x) = (Ax + B)\cos(x) + (Cx + D)\sin(x) \\ f_0'(x) = (A + Cx + D)\cos(x) + (C - Ax - B)\sin(x) \\ f_0''(x) = (2C - Ax - B)\cos(x) + (-2A - Cx - D)\sin(x) \end{cases}$

Donc, f_0 est solution de $(E) \Leftrightarrow$ $\forall x \in \mathbb{R}, 2Ccos(x) - 2Asin(x) = \cos(x) \Leftarrow \begin{cases} 2C = 1 \\ -2A = 0 \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} C = \frac{1}{2} \; et \; B \; et \; D \; quelconques \\ A = 0 \end{cases}$. Donc, $f_0 : (x \mapsto \frac{1}{2}xsin(x))$ est une SP de (E) et ainsi, les solutions réelles de(E)sont toutes les fonctions de la forme $(x \mapsto Ucos(x) + Bsin(x) + \frac{1}{2}xsin(x))$ où U et V constantes réelles.

d. $d(x) = d_1(x) + d_2(x) + d_3(x)$où d_1, d_2, d_3 fonctions continues sur $\mathbb{R}$ ayant chacune l'une des formes précédentes

53 **On utilise le principe de superposition :** Une SP de $(E) ay'' + by' + cy = d_1(x) + d_2(x)$ est la somme d'une SP de (E_1): $ay'' + by' + cy = d_1(x)$ et d' une SP de (E_2) $ay'' + by' + cy = d_2(x)$

54 **Exemple :** Résolvons $(E) : y'' + 4y = xsh^2(x)$
•Résolution de (EH): $y'' - 4y = 0$. Posons $(e.c)$: $r^2 + 4 = 0$. Les solutions de (e.c) sont $-2i$ et 2i. distinctes et conjuguées, complexes. Donc les solutions réelles de (EH) sont toutes les applications de la forme $\begin{pmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto (Ucos(2x) + Vsin(2x)) \end{pmatrix}$ telles que U et V constantes réelles.
•Solution particulière de (E) : le second membre est $d(x) = \underbrace{\frac{x}{4}e^{2x}}_{d_1(x)} + \underbrace{\frac{x}{4}e^{-2x}}_{d_2(x)} \underbrace{-\frac{x}{2}}_{d_3(x)}$. Appliquons la méthode de superposition.

On pose $(E_1) : y'' + 4y = \frac{x}{4}e^{2x}$, $(E_2) : y'' + 4y = \frac{x}{4}e^{-2x}$, et $(E_3) : y'' + 4y = -\frac{x}{2}$
••**Solution particulière de (E_1) :** $d_1(x) = P_1(x)e^{M_1 x}.P(x \mapsto \frac{x}{4})$ est polynomiale de degré 1 et $M_1 = 2$ n'est pas racine de $(e.c)$. Je cherche donc une solution particulière de (E_1) sous la forme $f(x) = Q(x)e^{2x}$ avec Q polynomiale de degré 1 i.e. $f(x) = (ux + v)e^x$ où u, v sont des constantes réelles à déterminer pour que f soit solution de (E). Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} f(x) = (ux + v)e^{2x} \\ f'(x) = (2ux + 2v + u)e^{2x} \\ f''(x) = (4ux + 4v + 4u)e^{2x} \end{cases}$

Alors , f solution de $(E_1) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f(x) + 4f''(x) = \frac{x}{4}e^{2x} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, ((8u)x + 8v + 4u)e^{2x} = \frac{x}{4}e^{2x}$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, (8u)x + 8v + 4u = \frac{x}{4} \Leftarrow \begin{cases} 8u = \frac{1}{4} \\ 8v + 4u = 0 \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} u = \frac{1}{32} \\ v = -\frac{1}{64} \end{cases}$. Ainsi, $f_1 : \left(x \mapsto \left(\frac{1}{32}x - \frac{1}{64}\right)e^{2x}\right)$ est une solution particulière de (E_1).
••**Solution particulière de (E_2) :** idem on cherche une solution particulière de (E_2) sous la forme $f(x) = Q(x)e^{-2x}$ avec Q polynomiale de degré 1 i.e. $f(x) = (ux + v)e^{-2x}$ où u, v sont des constantes réelles à déterminer pour que f soit solution de (E). Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} f(x) = (ux + v)e^{2x} \\ f'(x) = (-2ux - 2v + u)e^{2x} \\ f''(x) = (4ux + 4v - 4u)e^{2x} \end{cases}$

Alors , f solution de $(E_1) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f(x) + 4f''(x) = \frac{x}{4}e^{2x} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, ((8u)x + 8v - 4u)e^{2x} = \frac{x}{4}e^{2x} \Leftarrow \begin{cases} u = \frac{1}{32} \\ v = \frac{1}{64} \end{cases}$.

Ainsi, $f_2 : \left(x \mapsto \left(\frac{1}{32}x + \frac{1}{64}\right)e^{-2x}\right)$ est une solution particulière de (E_2).
••**Solution particulière de (E_3) :** Ainsi, $f_3 : \left(x \mapsto \left(-\frac{x}{4}\right)\right)$ est une solution particulière de (E_3).
Par le théorème de superposition, $f = f_1 + f_2 + f_3$ est une solution particulière de (E).
•Conclusion : les solutions réelles de (E) sont toutes les applications de la forme
$\begin{pmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \left(\frac{1}{32}x - \frac{1}{64}\right)e^{2x} + \left(\frac{1}{32}x + \frac{1}{64}\right)e^{-2x} - \frac{x}{4} + (Ucos(2x) + Vsin(2x)) \end{pmatrix}$ telles que U et V constantes réelles.

4. Problème de Cauchy relatif à (E) .

55 **Théorème** : Soit a, b, c des constantes, a non nulle , d une fonction de la forme précédente et $(x_0, u_0, v_0) \in \mathbb{R}^3$.
Alors il existe une et une seule fonction y deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifiant :

$$(C) : \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, ay''(x) + by'(x) + cy(x) = d(x) \\ y(x_0) = u_0 \\ y'(x_0) = v_0 \end{cases}$$