CORRIGE des EXERCICES soutien et colle 24-25-26

(*exercices plus ou moins traités en classe, certaines questions sont plus théoriques ou astucieuses)**

Ex1* Soit $H=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4/x+2t=z-y\}$ et $G=\{(a,b,3a,a+b))/a,b\text{ réels}\}$

1. Montrer que H et G sont deux ss-e-v de $\mathbb{R}^4$. Déterminer la dimension de chacun de ces espaces.
2. Déterminer une base de $H\cap G$ et une base de $H+G$.
3. H et G sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?
4. Déterminer un supplémentaire de H dans $\mathbb{R}^4$.

1. $H=\{(z-y-2t,y,z,t)/y,z,t\text{ réels}\}$=$\{(z,0,z,0)+(-y,y,0,0)+(-2t,0,0,t)/\ x,y,t\text{ réels}\}$
$H=\{z(1,0,1,0)+y(-1,1,0,0)+t(-2,0,0,1)/\ x,y,t\text{ réels}\}$
$H=vect((1,0,1,0),(-1,1,0,0),(-2,0,0,1))$.
Comme $(1,0,1,0),(-1,1,0,0),(-2,0,0,1)$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^4$, H est le ss-e-v de $\mathbb{R}^4$engendré par ces 3 vecteurs.
Comme la famille $\mathscr{H}=((1,0,1,0),(-1,1,0,0),(-2,0,0,1))$ est échelonnée en zéro (par la droite) , cette famille est libre et, finalement, $\mathscr{H}$ est une base de H. Ainsi, $dimH=card\mathscr{H}=3$.
$G=\{(a,b,3a,a+b))/a,b\text{ réels}\}=\{(a,0,3a,a)+(0,b,0,b)/a,b\text{ réels}\}=\{a(1,0,3,1)+b(0,1,0,1)/a,b\text{ réels}\}$
$G=\ vect((1,0,3,1),(0,1,0,1))$.
Comme $(1,0,3,1),(0,1,0,1)$sont des vecteurs de $\mathbb{R}^4$, G est le ss-e-v de $\mathbb{R}^4$engendré par ces 2 vecteurs.
Comme les deux vecteurs $(1,0,3,1)$ *et* $(0,1,0,1)$ne sont clairement pas colinéaires, la famille $\mathscr{G}=((1,0,3,1),(0,1,0,1))$ est libre et, finalement, $\mathscr{G}$ est une base de G. Ainsi, $dimG=card\,\mathscr{G}=2$.

2. $H\cap G=\{(a,b,3a,a+b))/a,b\text{ réels}$ et $a+2(a+b)=3a-b\}$=$\{(a,b,3a,a+b))/a,b\text{ réels}$ et $b=0\}$
$H\cap G$=$\{(a,0,3a,a))/a\text{ réel}\}$=$vect((1,0,3,1))$.
Comme $(1,0,3,1)$ n'est pas le vecteur nul, $((1,0,3,1))$ est libre et $H\cap G$ est la droite vectorielle engendrée par ce vecteur $(1,0,3,1)$ et $dimH\cap G\ =1$. Alors Grassmann assure que $dim\,(H+G)=dimH+dimG-dim\,H\cap G=4=$ $\dim\mathbb{R}^4$. Comme $H+G$ est un ss-e-v de $\mathbb{R}^4$, j'en déduis que $H+G=\mathbb{R}^4$. Ainsi, la base canonique $\mathscr{B}_c$ de $\mathbb{R}^4$est une base de $H+G$ où $\mathscr{B}_c=((1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1))$.

3. Comme dim $(H\cap G\ )\neq 0$ i.e. $H\cap G\ \neq\{(0,0,0,0)\}$, H et G ne sont pas supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

4. D'après le cours, comme $\mathbb{R}^4$ est de dimension finie, H admet au moins un supplémentaire dans $\mathbb{R}^4$et tout supplémentaire F de H dans $\mathbb{R}^4$ vérifie $dimF=dim\mathbb{R}^4-dimH=1$. Complétons donc la base $\mathscr{H}$ de H par un vecteur de $\mathscr{B}_c$ bien choisi pour obtenir une nouvelle base de $\mathbb{R}^4$.
Comme $((1,0,1,0),(-1,1,0,0),(-2,0,0,1),(1,0,0,0))$ est une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^4$, échelonnée en zéro donc libre et de cardinal 4, il s'agit donc d'une base de $\mathbb{R}^4$. Alors le théorème de caractérisation de ss-e-v supplémentaires par concaténation des bases assure que $F=vect((1,0,0,0))$ est un supplémentaire de H dans $\mathbb{R}^4$.

Soit E un K-e-v de dimension 4 et $\mathscr{B}$ $(=\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k},\vec{s})$ une base de E.
Soit $F=\{x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k}+t\vec{s}/x,y,z,t\ \in K\ et\ x+y=z+t\ et\ x=2t+y\}$ et G =vect$(\vec{\imath}+2\vec{\jmath},3\vec{\imath}-\vec{\jmath})$.

a. Justifier que G est un ss-e-v de E et déterminer une base de G. Faire de même pour F.
b. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.
c. Trouver un **autre** supplémentaire de F dans E.
d. Compléter $G=\{x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k}+t\vec{s}/x,y,z,t\ \in K\ et\ \ldots..\}$

Soit $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ trois vecteurs de E tels que $M=mat_B(\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d})=\begin{pmatrix}1+x & x & x & x\\ y & 1+y & y & y\\ z & z & 1+z & z\\ t & t & t & 1+t\end{pmatrix}$ où $(x,y,z,t)\in K^4$.

e. Exprimer $\vec{a},\vec{b},\vec{c}\,,\vec{d}$ en fonction de $\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\ et\ \vec{s}$.
f. $H=\{(x,y,z,t)\in K^4/(\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d})$ est une famille libre$\}$ est -il un ss-e-v de K^4?

a. G =vect$(\vec{\imath}+2\vec{\jmath},3\vec{\imath}-\vec{\jmath})$. Comme $\vec{\imath}+2\vec{\jmath},3\vec{\imath}-\vec{\jmath}$ sont des vecteurs de E, G est le ss-e-v de E engendré par la famille $\mathscr{G}$=$(\vec{\imath}+2\vec{\jmath},3\vec{\imath}-\vec{\jmath})$. . De plus, prenons a et b dans K ; alors, $a(\vec{\imath}+2\vec{\jmath})+b(3\vec{\imath}-\vec{\jmath})=\overrightarrow{0_E}\Leftrightarrow(a+3b)\vec{\imath}+(2a-b)\vec{\jmath}=\overrightarrow{0_E}\Leftrightarrow\begin{cases}a+3b=0\\2a-b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\b=0\end{cases}$. Donc la famille $\mathscr{G}$=$(\vec{\imath}+2\vec{\jmath},3\vec{\imath}-\vec{\jmath})$ est libre et $\mathscr{G}$ est finalement une base de G. Donc, $dimG$=card $\mathscr{G}=2$.

$$F=\left\{x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k}+t\vec{s}/\ x,y,z,t\ \in K\ et\ \begin{Bmatrix}2t+y+y=z+t\\x=2t+y\end{Bmatrix}\right\}=\left\{x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k}+t\vec{s}/\ x,y,z,t\ \in K\ et\ \begin{Bmatrix}z=t+2y\\x=2t+y\end{Bmatrix}\right\}$$
$$=\{(2t+y)\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+(t+2y)\vec{k}+t\vec{s}/y,t\ \in K=\{y(\vec{\imath}+\vec{\jmath}+2\vec{k})+t(2\vec{\imath}+\vec{k}+\vec{s})/y,t\ \in K\}$$
$$=vect\left((\vec{\imath}+\vec{\jmath}+2\vec{k}),(2\vec{\imath}+\vec{k}+\vec{s})\right).$$

On peut alors conclure de la même manière que G que F *est un ss-e-v de E et* $\mathscr{F}=((\vec{\imath}+\vec{\jmath}+2\vec{k}),(2\vec{\imath}+\vec{k}+\vec{s}))$ est une base de F et $dimF=2$.

b. Utilisons la caractérisation par concaténation des bases : notons $\mathscr{B}$' =$(\vec{\imath}+2\vec{\jmath},3\vec{\imath}-\vec{\jmath},\vec{\imath}+\vec{\jmath}+2\vec{k},2\vec{\imath}+\vec{k}+\vec{s}\ )$. la concaténation de $\mathscr{G}$ et $\mathscr{F}$et $P=mat_{\mathscr{B}}\mathscr{B}$'. Alors

$P=\begin{pmatrix}1&3&1&2\\2&-1&1&0\\0&0&2&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$. Alors $\det(P)=\begin{vmatrix}1&3&1&2\\2&-1&1&0\\0&0&2&1\\0&0&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}7&3&1&2\\0&-1&1&0\\0&0&2&1\\0&0&0&1\end{vmatrix}=-14$. Donc P est inversible et par conséquent, $\mathscr{B}$' est une base de E. J'en déduis que $F\oplus G=E$.

c. Complétons la famille libre $\mathscr{T}$ par deux vecteurs bien choisis de $\mathscr{B}$ pour obtenir une nouvelle base de E.

Soit $Q=mat_{\mathscr{B}}(\vec{\imath}+\vec{\jmath}+2\vec{k},2\vec{\imath}+\vec{k}+\vec{s},\vec{k},\vec{\imath})=\begin{pmatrix}1&2&0&1\\1&0&0&0\\2&1&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\sim_C\begin{pmatrix}1&2&0&1\\1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}=Q'$. Les colonnes de Q' étant échelonnées en zéro, forment une famille libre donc $rg(Q')=4$ et par conséquent, $rg(Q)=4$. Ainsi, Q est inversible et ($\vec{\imath}+\vec{\jmath}+2\vec{k},2\vec{\imath}+\vec{k}+\vec{s},\vec{k},\vec{\imath}$) est une nouvelle base de E. Alors le théorème de caractérisation des supplémentaires par concaténation des bases assure que $H=vect(\vec{k},\vec{\imath})$ est un supplémentaire de F dans E. Comme $\vec{k}\notin G$ (puisque'il est impossible d'écrire $\vec{k}$ comme combinaison linéaire de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ donc de $\vec{\imath}+2\vec{\jmath}$ et $3\vec{\imath}-\vec{\jmath}$), $H\neq G$.

d. $G=\text{vect}(\vec{\imath}+2\vec{\jmath},3\vec{\imath}-\vec{\jmath})=\text{vect}(7\vec{\imath},3\vec{\imath}-\vec{\jmath})=\text{vect}(\vec{\imath},3\vec{\imath}-\vec{\jmath})=\text{vect}(\vec{\imath},-\vec{\jmath})=\text{vect}(\vec{\imath},\vec{\jmath})==\{x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k}+t\vec{s}/x,y,z,t\in K \text{ et } z=t=0\}$

e. $\vec{a}=(x+1)\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k}+t\vec{s}$
$\vec{b}=x\vec{\imath}+(1+y)\vec{\jmath}+z\vec{k}+t\vec{s}$
$\vec{c}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+(1+z)\vec{k}+t\vec{s}$
$\vec{d}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k}+(1+t)\vec{s}$

f. $H=\{(x,y,z,t)\in K^4/(\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d})\text{ libre}\}\underbrace{=}_{car\ card(\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d})=dimE}\{(x,y,z,t)\in K^4/(\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d})\text{ base de }E\}$

$$H\underbrace{=}_{car\ card(\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d})=dimE}\left\{(x,y,z,t)\in K^4/\begin{vmatrix}1+x&x&x&x\\y&1+y&y&y\\z&z&1+z&z\\t&t&t&1+t\end{vmatrix}\neq 0\right\}.$$

$$Or,\begin{vmatrix}1+x&x&x&x\\y&1+y&y&y\\z&z&1+z&z\\t&t&t&1+t\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1+x+y+z+t&1+x+y+z+t&1+x+y+z+t&1+x+y+z+t\\y&1+y&y&y\\z&z&1+z&z\\t&t&t&1+t\end{vmatrix}$$

$$=(1+x+y+z+t)\begin{vmatrix}1&1&1&1\\y&1+y&y&y\\z&z&1+z&z\\t&t&t&1+t\end{vmatrix}=(1+x+y+z+t)\begin{vmatrix}1&0&0&0\\y&1&0&0\\z&0&1&0\\t&0&0&1\end{vmatrix}$$

$=(1+x+y+z+t)$.

Donc, $H=\{(x,y,z,t)\in K^4/\ 1+x+y+z+t\neq 0\}$.

Alors H n'est pas stable par multiplication externe car $(1,1,1,1)\in H$ mais $\left(-\frac{1}{4}\right)(1,1,1,1)\notin H$. Donc H n'est pas un ss-e-v de $\mathbb{R}^4$.

Ex11* Soit , $f_0=2$, $f_1:(x\mapsto\ln(3x))$, $f_2:(x\mapsto\frac{1}{x})$, $f_3:(x\mapsto\ln(9x))$, $f_4:\left(x\mapsto\frac{1}{x^2+x}\right)$, $f_5:\left(x\mapsto\frac{1}{x+1}\right)$, $f_6:\left(x\mapsto\frac{\ln(x)}{x}\right)$.
Déterminer $rg(f_0,f_1,f_2,f_3,f_4,f_5,f_6)$.

Notons $\mathscr{T}=(f_0,f_1,f_2,f_3,f_4,f_5,f_6)$. $\mathscr{T}$ est une famille de vecteur de $C^\infty(\mathbb{R}^{+*},\mathbb{R})$.
D'après le cours, $rg(f_0,f_1,f_2,f_3,f_4,f_5,f_6)=dim(vect\ (f_0,f_1,f_2,f_3,f_4,f_5,f_6))$.
Cherchons une base de $F=vect\ (f_0,f_1,f_2,f_3,f_4,f_5,f_6)$ pour connaitre la dimension de F.
$(f_0,f_1,f_2,f_3,f_4,f_5,f_6)$ est génératrice de F. Etudions les relations de dépendance linéaire entre les vecteurs de cette famille.
$\forall x\in\mathbb{R}^{+*},\ln(9x)=\ln(3)+\ln(3x)=\frac{\ln(3)}{2}.2+1.\ln(3x)$. Donc $f_3=\frac{\ln(3)}{2}.f_0+1.f_1+0.f_2+0.f_5+0.f_6$.
$\forall x\in\mathbb{R}^{+*},\frac{1}{x^2+x}=\frac{1}{x(x+1)}\underbrace{=}_{\substack{décomposition\\ en\ éléments\\ simples}}\frac{1}{x}-\frac{1}{(x+1)}$. Donc, $f_4=f_2-f_5+0.f_0+0.f_1+0.f_6$.

Donc, f_3 *et* f_4 sont combinaisons linéaires de f_0,f_1,f_2,f_5,f_6. Par conséquent, $F=vect\ (f_0,f_1,f_2,f_5,f_6)$.
Montrons que (f_0,f_1,f_2,f_5,f_6) est libre.
Soit $\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_5,\lambda_6$ des réels tels que $\lambda_0f_0+\lambda_1f_1+\lambda_2f_2+\lambda_5f_5+\lambda_6f_6=\omega$.
Donc $\forall t>0,\underbrace{2\lambda_0+\lambda_1\ln(3t)+\frac{\lambda_2}{t}+\frac{\lambda_5}{t+1}+\frac{\lambda_6\ln(t)}{t}}_{\varphi(t)}=0\ \ (**)$.

Alors $0\underbrace{=}_{car\ \varphi=\omega}\lim\limits_{t\to+\infty}\varphi(t)=\begin{cases}2\lambda_0\ si\ \lambda_1=0\\+\infty\ si\ \lambda_1>0\\-\infty\ si\ \lambda_1>0\end{cases}$. Donc nécessairement, $\lambda_0=\lambda_1=0$. Alors, $(**)$ devient :

$\forall t>0,\underbrace{\frac{\lambda_2}{t}+\frac{\lambda_5}{t+1}+\frac{\lambda_6\ln(t)}{t}}_{\varphi(t)}=0\ \ (**)$. Donc, en multipliant par t, $(**)$ devient $\forall t>0,\underbrace{\lambda_2+\lambda_5\frac{t}{t+1}+\lambda_6\ln(t)}_{\varphi(t)}=0\ \ (**)$.

Comme $\frac{t}{t+1}\sim_{+\infty}\frac{t}{t}=1$, $\lim\limits_{t\to+\infty}\lambda_5\frac{t}{t+1}=\lambda_5$. Alors $0\underbrace{=}_{car\ \varphi=\omega}\lim\limits_{t\to+\infty}\varphi(t)=\begin{cases}\lambda_2+\lambda_5\ si\ \lambda_6=0\\ +\infty\ si\ \lambda_1>0\\ -\infty\ si\ \lambda_1>0\end{cases}$. Donc nécessairement, $\lambda_6=0$ et $\lambda_2+\lambda_5=0$. Alors, $(**)$ devient : $\forall t>0, \lambda_2-\lambda_2\frac{t}{t+1}=0\ \ (**)$. i.e $\forall t>0, \lambda_2\frac{t}{t+1}=0\ \ (**)$. En évaluant en $t=1, \frac{\lambda_2}{2}=0$donc $\lambda_2=0$ puis $\lambda_5=0$.

Ainsi, (f_0,f_1,f_2,f_5,f_6) est libre. Et par suite, (f_0,f_1,f_2,f_5,f_6) est une base de F. Ainsi, $rg\big(f_0,f_1,f_2,f_3,f_4,f_5,f_6\big)=\dim(F)=5$.

Ex 12* Soit $n\in\mathbb{N}$. On pose $f_k:(t\mapsto e^{kt})$ .Montrer que $(f_0,f_1,\dots,f_n)$ est libre.

Soit $\lambda_0,\dots,\lambda_n$des réels tels que $\lambda_0f_0+\lambda_1f_1+\cdots+\lambda_nf_n=\omega$.

Donc $\forall t\in\mathbb{R}, \lambda_0+\lambda_1e^t+\cdots+\lambda_ne^{nt}=0\ \ (**)$.

1ère méthode : Posons $P(X)=\boldsymbol{\lambda}_0+\boldsymbol{\lambda}_1X+\cdots+\boldsymbol{\lambda}_nX^n\in\mathbb{R}[X]$. Alors $(**)$ s'écrit : $\forall t\in\mathbb{R}, \tilde{P}(e^t)=0$. Ainsi tout réel de la forme e^ttelle que $t\in\mathbb{R}$, est récine de P ; Comme $\{e^t/\ t\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}^{+*}$, P admet tous les réels strictement positifs comme racines. Ainsi, P a une infinité de racines et par conséquent, P est le polynôme nul. Donc tous les coefficients de P sont nuls i.e. $\lambda_0=\lambda_1=\ldots=\lambda_n=0$.

2ème méthode : En multipliant $(**)$ par e^{-nt}, $(**)$ devient $\forall t\in\mathbb{R}$, $\underbrace{\lambda_0e^{-t}+\lambda_1e^{(1-n)t}+\cdots+\lambda_{n-1}e^{-t}+\lambda_n}_{\varphi(t)}=0$.

Alors, $0\underbrace{=}_{car\ \varphi=\omega}\lim\limits_{t\to+\infty}\varphi(t)\underbrace{=}_{\substack{car\ \forall k>0,\\ \lim\limits_{t\to+\infty}e^{-kt}=0}}\lambda_n$. Et $(**)$ devient : $\forall t\in\mathbb{R}, \lambda_0+\lambda_1e^t+\cdots+\lambda_{n-1}e^{(n-1)t}=0\ \ (**)$. En multipliant $(**)$ par $e^{-(n-1)t}$, $(**)$ devient $\forall t\in\mathbb{R}$, $\underbrace{\lambda_0e^{-t}+\lambda_1e^{(1-n)t}+\cdots+\lambda_{n-2}e^{-t}+\lambda_{n-1}}_{\varphi(t)}=0$. Alors, $0\underbrace{=}_{car\ \varphi=\omega}\lim\limits_{t\to+\infty}\varphi(t)\underbrace{=}_{\substack{car\ \forall k>0,\\ \lim\limits_{t\to+\infty}e^{-kt}=0}}\lambda_{n-1}$.

En itérant ce procédé, on montre que $\lambda_1=\ldots=\lambda_n=0$. A la dernière étape, $(**)$ donne directement $\forall t\in\mathbb{R}, \lambda_0=0\ \ (**)$.

Ainsi, $\lambda_0=\lambda_1=\ldots=\lambda_n=0$.

Ex13** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\forall a\in I, \varphi_a:\left(x\to\begin{cases}1\ si\ x=a\\0\ si\ x\neq a\end{cases}\right)$.Montrer que la famille $\mathscr{S}=(\varphi_a)_{a\in I}$ est libre.

Cette famille est infinie. On va donc montrer que toute famille **finie** et extraite de $\mathscr{S}$ est libre.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $a_1,\dots,a_n$ des réels de I distincts. Montrons que $\mathscr{S}_n=\big(\varphi_{a_1},\varphi_{a_2,\dots},\varphi_{a_n}\big)$ est libre.

Soit $\lambda_1,\dots,\lambda_n$des réels tels que $\lambda_0\varphi_{a_0}+\lambda_1\varphi_{a_1}+\cdots+\lambda_n\varphi_{a_n}=\omega$.

Donc $\forall t\in\mathbb{R}, \lambda_1\varphi_{a_1}(t)+\lambda_2\varphi_{a_2}(t)+\cdots+\lambda_n\varphi_{a_n}(t)=0\ \ (**)$.

Soit $k\in[\![1,n]\!]$. Evaluant $(**)$ en $t=a_k$, j'obtiens : $\lambda_1\underbrace{\varphi_{a_1}(a_k)}_{=0}+\lambda_2\underbrace{\varphi_{a_2}(a_k)}_{=0}+\cdots+\lambda_k\underbrace{\varphi_{a_k}(a_k)}_{=1}+\cdots+\lambda_n\underbrace{\varphi_{a_n}(a_k)}_{=0}=0$ et par conséquent, $\lambda_k=0$. Ainsi, $\lambda_1=\ldots=\lambda_n=0$. $\mathscr{S}_n$est donc libre. J'en conclus que $\mathscr{S}$ est libre.

Ex4* Soit $F=\{P\in\mathbb{R}_3[X]/2P(1)=P''(0)\}$ et $G=\{(X-3)P/P\in\mathbb{R}_2[X]\}$

1. Montrer que F =vect$(X-1,X^3-1,X^2)$.
2. Montrer que G est un ss-e-v de $\mathbb{R}_3[X]$ et déterminer la dimension de G.
3. F et G sont-il supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$.
4. Trouver un supplémentaire H commun à F et à G dans $\mathbb{R}_3[X]$.

1.
$$\begin{aligned} F=\{P\in\mathbb{R}_3[X]/2P(1)=P''(0)\}&=\{a+bX+cX^2+dX^3/a,b,c,d\ réels\ et\ 2(a+b+c+d)=2c\}\\ &=\{a+bX+cX^2+dX^3/a,b,c,d\ réels\ et\ d=-a-b\}\\ &=\{a+bX+cX^2+(-a-b)X^3/b,c,d\ réels\}\\ &=\{a(1-X^3)+b(X-X^3)+cX^2/b,c,d\ réels\}\\ &=vect(1-X^3,X-X^3,X^2)\\ &=vect(X^3-1,X-X^3,X^2)\\ &=vect(X^3-1,X-1,X^2)\end{aligned}$$

On multiplie par -1 le premier vecteur

On ajoute le premier vecteur au second

Comme la famille $(X^3-1,X-1,X^2)$ est une famille échelonnée en degré de vecteurs de $\mathbb{R}_3[X]$, elle est libre dans $\mathbb{R}_3[X]$ et ainsi, F est le ss-e-v de $\mathbb{R}_3[X]$ de base $\mathscr{F}=(X^3-1,X-1,X^2)$. Ainsi, dim $(F)=3$.

2. $G=\{(X-3)P/P\in\mathbb{R}_2[X]\}=\{(X-3)(a+bX+cX^2)/\ a,b,c\ réels\}$
$=\{a(X-3)+bX(X-3)+cX^2(X-3)/a,b,c\ réels\}=vect((X-3),X(X-3),X^2(X-3))$.

Comme la famille($(X-3),X(X-3),X^2(X-3)$) est une famille échelonnée en degré de vecteurs de $\mathbb{R}_3[X]$, elle est libre dans $\mathbb{R}_3[X]$ et ainsi, G est le ss-e-v de $\mathbb{R}_3[X]$ de base $\mathscr{G}=((X-3),X(X-3),X^2(X-3))$. Ainsi, dim $(G)=3$.

3. $dimF+dimG=6\neq4=dim\mathbb{R}_3[X]$. Donc F et G ne sont pas supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$.

4. Les familles $(X^3-1,X-1,X^2,1)$ et $((X-3),X(X-3),X^2(X-3),1)$ sont des familles échelonnées en degré de vecteurs de $\mathbb{R}_3[X]$, elles sont donc libres dans $\mathbb{R}_3[X]$. De plus, ces familles sont de cardinal 4 égal à $dim\mathbb{R}_3[X]$.Ainsi, $(X^3-1,X-1,X^2,1)$ et $\big((X-3),X(X-3),X^2(X-3),1\big)$sont des bases de $\mathbb{R}_3[X]$. J'en déduis par le théorème de caractérisation des supplémentaires par concaténation des bases que $H=vect(1)(=\mathbb{R}_0[X])$ est un supplémentaire commun à F et G dans $\mathbb{R}_3[X]$.

Ex5 **Soit a et b deux réels distincts et F l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_4[X]$ qui admettent a et b comme racines.
1. Montrer que F est un ss-e-v de $\mathbb{R}_4[X]$ et donner sa dimension .
2. Trouver une supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_4[X]$.

1. $$F \underbrace{=}_{\substack{car\ a\ et\ b\\ sont\ distincts}} \{(X-a)(X-b)Q(X)/Q \in \mathbb{R}_2[X]\} = \{(X-a)(X-b)(u+vX+wX^2)/Q \in \mathbb{R}_2[X]\}$$
$$= \{u(X-a)(X-b)+vX(X-a)(X-b)+wX^2(X-a)(X-b)/Q \in \mathbb{R}_2[X]\}$$
$$= vect\big((X-a)(X-b), X(X-a)(X-b), X^2(X-a)(X-b)\big).$$

Comme la famille($(X-a)(X-b), X(X-a)(X-b), X^2(X-a)(X-b)$) est une famille échelonnée en degré de vecteurs de $\mathbb{R}_4[X]$, elle est libre dans $\mathbb{R}_4[X]$ et ainsi, F est le ss-e-v de $\mathbb{R}_3[X]$ de base $\mathscr{F}= ((X-a)(X-b), X(X-a)(X-b), X^2(X-a)(X-b)$Ainsi, $\dim(F)=3$.

2. Les familles $((X-a)(X-b), X(X-a)(X-b), X^2(X-a)(X-b), 1, X$)est une famille échelonnée en degré de vecteurs de $\mathbb{R}_4[X]$, elle est donc libre dans $\mathbb{R}_4[X]$. De plus, cette famille est de cardinal 5 égal à $dim\mathbb{R}_4[X]$.Ainsi, $\big((X-a)(X-b), X(X-a)(X-b), X^2(X-a)(X-b), 1, X\big)$ est une base de $\mathbb{R}_4[X]$. J'en déduis par le théorème de caractérisation des supplémentaires par concaténation des bases que $H = vect(1,X)(=\mathbb{R}_1[X])$ est un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_4[X]$.

Ex6* Soit $A = diag(1,2,3)$ et $F = \{M \in M_3(\mathbb{R})/AM = MA\}$ et $G = \{M \in M_3(\mathbb{R})/tr(M) = 0\}$.
1. Montrer que F est un ss-e-v de $M_3(\mathbb{R})$ et trouver sa dimension. Faire de même pour G.
2. Déterminer une base de $F+G$ et une base de $F \cap G$.
3. Trouver un supplémentaire de G dans $M_3(\mathbb{R})$.

$$F = \left\{\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) / \begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}\right\}.$$

Or, $$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_1\\ b_1 = 2b_1\\ c_1 = 3c_1\\ 2a_2 = a_2\\ 2b_2 = 2b_2\\ 2c_2 = 3c_2\\ 3a_3 = a_3\\ 3b_3 = 2b_3\\ 3c_3 = 3c_3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1\ quelconque\\ b_1 = 0\\ c_1 = 0\\ a_2 = 0\\ b_2 quelconque\\ c_2 = 0\\ a_3 = 0\\ b_3 = 0\\ c_3 quelconque\end{cases}$$

Donc, $F = \{\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0\\ 0 & b_2 & 0\\ 0 & 0 & c_3\end{pmatrix} / a_1, b_2, c_3$ réels$\} = \{a_1\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} + b_2\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix} / a_1, b_2, c_3$ réels$\}$

$$F = vect\left(\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right).$$

Et, $$a_1\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} + b_2\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0\\ 0 & b_2 & 0\\ 0 & 0 & c_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \Leftrightarrow a_1 = b_2 = c_3 = 0$$

Donc, $\mathscr{F} = \left(\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)$ est une famille libre de vecteurs de $M_3(\mathbb{R})$. J'en déduis que F est le ss-e-v de $M_3(\mathbb{R})$ de base $\mathscr{F}$. Ainsi, $dimF = 3$.

$$G = \{M \in M_3(\mathbb{R})/tr(M) = 0\} = \{\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) / a_1 + b_2 + c_3 = 0\} = \{\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) / a_1 = -b_2 - c_3\}.$$
$$= \left\{\begin{pmatrix} -b_2 - c_3 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{pmatrix}, a_2, a_3, b_2, c_3, b_1, c_2, b_3, c_1 réels\right\}$$

$$G = \{b_2\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix} + b_1\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} + c_1\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} + b_3\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} +$$
$$a_2\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} + a_3\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix} / a_2, a_3, b_2, c_3, b_1, c_2, b_3, c_1 réels\}.$$

$$G = vect\underbrace{\left(\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\right)}_{=\mathscr{G}}$$

Et, $b_2\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}+b_1\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+b_3\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}+$

$$a_2\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+a_3\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-b_2-c_3&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow a_2=a_3=b_2=c_3=b_1=c_2=b_3=c_1=0$$

Donc, $\mathcal{G}$ est une famille libre de vecteurs de $M_3(\mathbb{R})$. Ainsi, G est le ss-e-v de $M_3(\mathbb{R})$ de base $\mathcal{G}$ et $dimG=8$.

3. $F\cap G=\{\begin{pmatrix}a_1&0&0\\0&b_2&0\\0&0&c_3\end{pmatrix}/a_1,b_2,c_3$ réels et $a_1+b_2+c_3=0\}=\{\begin{pmatrix}a_1&0&0\\0&b_2&0\\0&0&c_3\end{pmatrix}/a_1,b_2,c_3$ réels et $a_1=-b_2-c_3\}$

$F\cap G=\{\begin{pmatrix}-b_2-c_3&0&0\\0&b_2&0\\0&0&c_3\end{pmatrix}/b_2,c_3$ réels$\}=vect\left(\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)$. Les deux matrices $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ ne sont clairement pas colinéaires. Donc, $\left(\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)$ est libre et constitue une base de $F\cap G$. Ainsi, $\dim(F\cap G)=2$.

Alors Grassmann assure que $\dim(F+G)=dimF+dimG-\dim(F\cap G)=3+8-2=9=\dim(M_3(\mathbb{R}))$. Comme $F+G$ est un ss-e-v de $M_3(\mathbb{R})$, j'en conclus que $F+G=M_3(\mathbb{R})$ et la base canonique de $M_3(\mathbb{R})$ est une base de $F+G$.

4. Comme $M_3(\mathbb{R})$ est de dimension finie 9, G admet un supplémentaire dans $M_3(\mathbb{R})$ et tous les supplémentaires de G dans $M_3(\mathbb{R})$ sont de dimension 1 $(=9-8)$.

Complétons la base $\mathcal{G}$ de G par le vecteur $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ bien choisi. Vérifions que cette famille $\mathcal{G}'$ augmentée est une base de $M_3(\mathbb{R})$:

$\mathcal{G}'=\left(\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\right)$ est une famille de vecteurs de $M_3(\mathbb{R})$ de cardinal 9 . Et $\mathcal{G}'$ est libre car :

$$a\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+b_2\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}+b_1\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+b_3\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}+a_2\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+a_3\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}a-b_2-c_3&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow a-b_2-c_3=0\ et\ a_2=a_3=b_2=c_3=b_1=c_2=b_3=c_1=0$$

$$\Leftrightarrow a=a_2=a_3=b_2=c_3=b_1=c_2=b_3=c_1=0.$$

J'en déduis que $\mathcal{G}'$est une nouvelle base de $M_3(\mathbb{R})$. Alors, par le théorème de caractérisation des supplémentaires par concaténation des bases que $H=vect\left(\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right)$ est un supplémentaire de G dans $\mathbb{R}_4[X]$.

Ex7** H l'ensemble des fonctions continues sur $[-1;1]$ et affines sur $[-1,0]$ et affines sur $[0,1]$.

1. Montrer que H est un ss-e-v de $C^0([-1,1],\mathbb{R})$ de dimension finie.
2. Soit $G=\{f\in C^0([-1,1],\mathbb{R})/\ f(0)=f(-1)=f(1)=0\}$. Montrer que $F\oplus G=C^0([-1,1],\mathbb{R})$.

1. Soit $f:[-1\,;1]\to\mathbb{R}$.

$$\begin{matrix}f\ affine\ \ sur\ [-1,0]\\ f\ affine\ \ sur\ [0,1]\\ f\text{ continue sur }[-1\,;1]\end{matrix}\ \underbrace{\Leftrightarrow}_{car\ une\ fonction\ affine\ est\ continue}\begin{cases}\exists(a,b)\in\mathbb{R}^2,\forall x\in[-1;0],f(x)=ax+b\\ \exists(c,d)\in\mathbb{R}^2,\forall x\in[0;1],f(x)=cx+d\\ f\text{ continue en }0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\exists(a,b)\in\mathbb{R}^2,\forall x\in[-1;0],f(x)=ax+b\\ \exists(c,d)\in\mathbb{R}^2,\forall x\in[0;1],f(x)=cx+d\\ \lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\exists(a,b)\in\mathbb{R}^2,\forall x\in[-1;0],f(x)=ax+b\\ \exists(c,d)\in\mathbb{R}^2,\forall x\in[0;1],f(x)=cx+d\\ b=d\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\begin{cases}\forall x\in[-1;0],f(x)=ax+b\\ \forall x\in[0;1],f(x)=cx+b\end{cases}$$

Donc, $H=\left\{\left(x\mapsto\begin{cases}ax+b\ si\ \ x\in[-1;0]\\ cx+b\ \ si\ x\in[0;1]\end{cases}\right)/a,b,c\ \ réels\right\}$

$$H=\left\{a\underbrace{\left(x\mapsto\begin{cases}x\ si\ \ x\in[-1;0]\\ 0\ \ si\ x\in[0;1]\end{cases}\right)}_{u}+b\underbrace{\left(x\mapsto\begin{cases}0\ si\ \ x\in[-1;0]\\ x\ \ si\ x\in[0;1]\end{cases}\right)}_{v}+c\underbrace{(x\mapsto1)}_{w}/a,b,c\ \ réels\right\}=vect(u,v,w).$$

Comme u, v et w sont trois fonctions de $C^0([-1,1],\mathbb{R})$, H est un ss-e-v de $C^0([-1,1],\mathbb{R})$. Vérifions que (u,v,w)est libre :

Soit a,b,c réels. $au+bv+cw=\omega \Longrightarrow \begin{cases}\forall x\in[-1;0], f(x)=ax+b\\ \forall x\in[0;1], f(x)=cx+b\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} b=0\ (\,pour\ x=0)\\ -a+b=0\ (\,pour\ x=-1)\\ c+b=0\ (\,pour\ x=1)\end{cases} \Longrightarrow a=b=c=0.$

Donc (u,v,w)est libre et, finalement, est une base de F. Donc $dimF=3$.

2. Soit $G=\{f\in C^0([-1,1],\mathbb{R})/f(0)=f(-1)=f(1)=0\}$.

<u>Montrer que G est un ss-e-v de $C^0([-1,1],\mathbb{R})$.</u>

$G\subset C^0([-1,1],\mathbb{R})$.

$\omega:(x\mapsto 0)$ appartient à G car $\omega\in C^0([-1,1],\mathbb{R})/\omega(0)=\omega(-1)=\omega(1)=0$.

Soit $g\ et\ h$ deux éléments de G et α et β deux réels. Alors $g,h\in C^0([-1,1],\mathbb{R})/\begin{cases}g(0)=g(-1)=g(1)=0\\ h(0)=h(-1)=h(1)=0\end{cases}$.

Alors $\alpha g+\beta h\in C^0([-1,1],\mathbb{R})$ et $\begin{cases}(\alpha g+\beta h)(0)=\alpha g(0)+\beta h(0)=0\\ (\alpha g+\beta h)(1)=\alpha g(1)+\beta h(1)=0\\ (\alpha g+\beta h)(-1)=\alpha g(-1)+\beta h(-1)=0\end{cases}$. Donc, $\alpha g+\beta h\in G$.

<u>Montrer que $F\oplus G=C^0([-1,1],\mathbb{R})$.</u> Montrons que toute fonction de $C^0([-1,1],\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique comme somme d'une fonction de F et d'une fonction de G.

Prenons donc une fonction φ de $C^0([-1,1],\mathbb{R})$. Et cherchons $f\in F\ et\ g\in G$ telles que $\varphi=f+g$.

Analyse : supposons que de telles fonctions f et g existent. Alors $\begin{cases}\forall x\in[-1;1], \varphi(x)=f(x)+g(x)\\ \exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3/f:\left(x\mapsto\begin{cases}ax+b\ si\ \ x\in[-1;0]\\ cx+b\ \ si\ x\in[0;1]\end{cases}\right)\\ g(0)=g(-1)=g(1)=0\end{cases}$.

Alors , $\begin{cases}\varphi(-1)=f(-1)+g(-1)=-a+b\\ \varphi(1)=f(1)+g(1)=c+b\\ \varphi(0)=f(0)+g(0)=b\end{cases}$. Donc, $\begin{cases}a=\varphi(0)-\varphi(-1)\\ c=\varphi(1)-\varphi(0)\\ b=\varphi(0)\end{cases}$. Alors

$f:\left(x\mapsto\begin{cases}(\varphi(0)-\varphi(-1))x+\varphi(0)\ si\ \ x\in[-1\,;0]\\ (\varphi(1)-\varphi(0))x+\varphi(0)\ \ si\ x\in[0\,;1]\end{cases}\right)$et $g=\varphi-f$ i.e. $g:\left(x\mapsto\begin{cases}\varphi(x)-((\varphi(0)-\varphi(-1))x+\varphi(0))\ si\ \ x\in[-1;0]\\ \varphi(x)-(\varphi(1)-\varphi(0))x+\varphi(0)\ \ si\ x\in[0;1]\end{cases}\right)$.

Ainsi, si de telles fonctions f et g existent, alors elles sont uniques et valent :

Synthèse : Soit $f:\left(x\mapsto\begin{cases}(\varphi(0)-\varphi(-1))x+\varphi(0)\ si\ \ x\in[-1\,;0]\\ (\varphi(1)-\varphi(0))x+\varphi(0)\ \ si\ x\in[0\,;1]\end{cases}\right)$ et $g:\left(x\mapsto\begin{cases}\varphi(x)-((\varphi(0)-\varphi(-1))x+\varphi(0))\ si\ \ x\in[-1;0]\\ \varphi(x)-(\varphi(1)-\varphi(0))x+\varphi(0)\ \ si\ x\in[0;1]\end{cases}\right)$.

Alors, $f\in F$ (car f est cl de u,v,w) et

$\forall x\in[-1;0], f(x)+g(x)=\big(\varphi(0)-\varphi(-1)\big)x+\varphi(0)+\varphi(x)-\Big(\big(\varphi(0)-\varphi(-1)\big)x+\varphi(0)\Big)=\ \varphi(x)$

$\forall x\in[0;1], f(x)+g(x)=(\varphi(1)-\varphi(0))x+\varphi(0)+\varphi(x)-\big((\varphi(1)-\varphi(0))x+\varphi(0)\big)=\ \varphi(x)$

Donc, $f+g=\varphi$

Enfin, $\varphi\ et\ f$ étant dans $C^0([-1,1],\mathbb{R})$, $g=\varphi-f$ est aussi dans $C^0([-1,1],\mathbb{R})$; de plus,

$\begin{cases}g(-1)=\varphi(-1)-\Big(\big(\varphi(0)-\varphi(-1)\big)(-1)+\varphi(0)\Big)=0\\ g(1)=\varphi(1)-\Big(\big(\varphi(1)-\varphi(0)\big)(1)+\varphi(0)\Big)=0\\ g(0)=\varphi(0)-\varphi(0)=0\end{cases}$. Donc, $g\in G$.

Ainsi, f et g conviennent et d'après l'analyse, sont les seules qui conviennent. Donc la fonction φ (quelconque dans $C^0([-1,1],\mathbb{R})$) s'écrit de manière unique comme somme d'une fonction de F et d'une fonction de G.

J'en conclus que $F\oplus G=C^0([-1,1],\mathbb{R})$.

Ex8**Soit $n\in\mathbb{N}\backslash\{0,1\}\ et\ \mathscr{L}=(\vec{u}_i)_{i=1..n}$une famille libre de vecteur d'un K- espace vectoriel E.

1. Etudier la liberté de la famille $\mathscr{T}=(\vec{u}_1+\vec{u}_2,\vec{u}_2+\vec{u}_3,..,\vec{u}_{n-1}+\vec{u}_n,\vec{u}_1+\vec{u}_n)$.
2. Soit $p\in[\![1,n-1]\!]$. Justifier que $vect(\,\vec{u}_1,..,\vec{u}_p)\ \ et\ vect(\,\vec{u}_{p+1},..,\vec{u}_n)$ sont en somme directe.
3. Soit F et G deux ss-e-v de E tels que : $F\oplus G=E$ et $G=vect\big(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\dots,\vec{u}_p\big)$.Soit $\vec{a}\in F$ et $G_{\vec{a}}=vect\big(\vec{a}+\vec{u}_1,\vec{a}+\vec{u}_2,..,\vec{a}+\vec{u}_p\big)$.
   a. Montrer que G_a et F sont supplémentaires dans E.
   b. Justifier que G_a est de dimension finie et déterminer sa dimension.
4. Ici E est de dimension finie p, de base $\mathscr{B}=(\vec{e}_i)_{i=1..p}$. On pose : $\forall i\in[\![1,p-1]\!], \vec{\varepsilon_i}=\vec{e}_i-\big(\vec{e}_{i+1}+\vec{e}_{i+2}+..+\vec{e}_p\big)$ et $\vec{\varepsilon_p}=\vec{e_p}$. Montrer que $\mathscr{B}'=(\vec{\varepsilon_i})_{i=1..p}$est une base de E . Soit $\vec{x}\in E$. Exprimer les composantes de $\vec{x}$ dans la base $\mathscr{B}'$ en fonction les composantes de $\vec{x}$ dans $\mathscr{B}$.

1. Soit $\lambda_1,\dots,\lambda_n$des scalaires tels que: $\lambda_1(\vec{u}_1+\vec{u}_2)+\lambda_2(\vec{u}_2+\vec{u}_3)+\cdots+\lambda_{n-1}(\vec{u}_{n-1}+\vec{u}_n)+\lambda_n(\vec{u}_n+\vec{u}_1)=\overrightarrow{O_E}$.
   Donc, $(\lambda_1+\lambda_n)\vec{u}_1+(\lambda_1+\lambda_2)\vec{u}_2+(\lambda_2+\lambda_3)\vec{u}_3+\cdots.+(\lambda_{n-1}+\lambda_n)\vec{u}_n=\overrightarrow{O_E}$.
   Comme $\mathscr{L}$ est libre, nécessairement, $\begin{cases}\lambda_1+\lambda_n=0\\ \lambda_1+\lambda_2=0\\ \lambda_2+\lambda_3=0\\ \vdots\\ \lambda_{n-2}+\lambda_{n-1}=0\\ \lambda_{n-1}+\lambda_n=0\end{cases}$. Donc, $\begin{cases}\lambda_1=-\lambda_n\\ \lambda_2=\lambda_n\\ \lambda_3=-\lambda_n\\ \vdots\\ \lambda_{n-1}=(-1)^{n-1}\lambda_n\\ \lambda_n=(-1)^n\lambda_n\end{cases}$.

Ou bien n est impair. Alors, $\begin{cases} \lambda_1 = -\lambda_n \\ \lambda_2 = \lambda_n \\ \lambda_3 = -\lambda_n \\ \vdots \\ \lambda_{n-1} = (-1)^{n-1}\lambda_n \\ \lambda_n = -\lambda_n \end{cases}$ donc, $\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \vdots \\ \lambda_{n-1} = 0 \\ \lambda_n = 0 \end{cases}$ et ainsi, $\mathscr{F}$ est libre.

Ou bien n est impair. Alors, $\begin{cases} \lambda_1 = -\lambda_n \\ \lambda_2 = \lambda_n \\ \lambda_3 = -\lambda_n \\ \vdots \\ \lambda_{n-1} = -\lambda_n \\ \lambda_n = \lambda_n \end{cases}$ donc, $\begin{cases} \lambda_1 = -\lambda_n \\ \lambda_2 = \lambda_n \\ \lambda_3 = -\lambda_n \\ \vdots \\ \lambda_{n-1} = -\lambda_n \\ \lambda_n \; quelconque \end{cases}$ et ainsi, en prenant $\lambda_n = 1, on\ a$ $\begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = -1 \\ \vdots \\ \lambda_{n-1} = -1 \\ \lambda_n = 1 \end{cases}$ une solution non nulle et $-(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) + (\vec{u}_2 + \vec{u}_3) - \cdots - 1(\vec{u}_{n-1} + \vec{u}_n) + (\vec{u}_n + \vec{u}_1) = \overrightarrow{O_E}\ est$ est une écriture non triviale de $\overrightarrow{O_E}$ comme c.ℓ. des vecteurs de $\mathscr{F}$. Ainsi, $\mathscr{F}$ est liée.

2. Soit $p \in [\![1, n-1]\!]$.
$\overrightarrow{O_E} \in vect(\vec{u}_1, .., \vec{u}_p) \cap vect(\vec{u}_{p+1}, .., \vec{u}_n)$ (car $\overrightarrow{O_E} = 0\vec{u}_1 + .. + 0\vec{u}_p \in vect(\vec{u}_1, .., \vec{u}_p)$ et $\overrightarrow{O_E} = 0\,\vec{u}_{p+1} + .. + 0\vec{u}_n \in vect(\vec{u}_{p+1}, .., \vec{u}_n)$)
Soit $\vec{x} = vect(\vec{u}_1, .., \vec{u}_p) \cap vect(\vec{u}_{p+1}, .., \vec{u}_n)$. Donc, il existe des scalaires $a_1, \dots, a_n$tels que : $\vec{x} = a_1\vec{u}_1 + .. + a_p\vec{u}_p = a_{p+1}\,\vec{u}_{p+1} + .. + a_n\vec{u}_n$. Donc, $a_1\vec{u}_1 + .. + a_p\vec{u}_p - a_{p+1}\,\vec{u}_{p+1} - .. - a_n\vec{u}_n = \overrightarrow{O_E}$. Comme $\mathscr{L}$ est libre, nécessairement, $a_1 = .. = a_p = -a_{p+1} = .. = -a_n = 0$. Ainsi, $\vec{x} = \overrightarrow{O_E}$.
J'en conclus que $vect(\vec{u}_1, .., \vec{u}_p) \cap vect(\vec{u}_{p+1}, .., \vec{u}_n) = \{\overrightarrow{O_E}\}$.
Ainsi, $vect(\vec{u}_1, .., \vec{u}_p)$ et $vect(\vec{u}_{p+1}, .., \vec{u}_n)$sont en somme directe.

3. Soit F et G deux ss-e-v de E tels que : $F \oplus G$=E et $G = vect(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$.
   a. Comme $\mathscr{L}$ est libre, $\mathscr{G}$=$(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$, famille extraite de $\mathscr{L}$ est libre, est libre et est par conséquent, une base de G.

Soit $\vec{a} \in F$ et $G_{\vec{a}} = vect(\vec{a} + \vec{u}_1, \vec{a} + \vec{u}_2, .., \vec{a} + \vec{u}_p)$. Montrons que $G_{\vec{a}}$ et F sont supplémentaires dans E i.e. que tout vecteur de E s'écrit comme somme d'une vecteur de $G_{\vec{a}}$ et d'un vecteur de F.

Soit $\vec{x}$ un vecteur de E. Alors, comme $F \oplus G$=E, $\exists!\,(\overrightarrow{x_F}, \overrightarrow{x_G}) \in F \times G / \vec{x} = \overrightarrow{x_F} + \overrightarrow{x_G}$.

Analyse : supposons qu'il existe $\vec{f} \in F$ et $\vec{h} \in G_{\vec{a}}$ tels que $\vec{x} = \vec{f} + \vec{h}$. Alors

$$\begin{cases} \exists(\beta_1, \dots, \beta_n) \in K^n, \vec{h} = \beta_1(\vec{a} + \vec{u}_1) + \beta_2(\vec{a} + \vec{u}_2) + .. + \beta_p(\vec{a} + \vec{u}_p). \\ \vec{f} \in F \\ \overrightarrow{x_F} + \overrightarrow{x_G} = \vec{f} + \beta_1(\vec{a} + \vec{u}_1) + \beta_2(\vec{a} + \vec{u}_2) + .. + \beta_p(\vec{a} + \vec{u}_p) \end{cases}$$

Donc, $\underbrace{\overrightarrow{x_F} - \vec{f} - (\beta_1 + .. + \beta_p)\vec{a}}_{\substack{\in F \\ car\ F\ stable\ par\ c.l}} = \underbrace{\beta_1\vec{u}_1 + \beta_2\vec{u}_2 + .. + \beta_p\vec{u}_p - \overrightarrow{x_G}}_{\substack{\in G \\ car\ G\ stable\ par\ c.l.}}$. Comme $F \cap G$ ne contient que le vecteur nul (puisque 'ils sont supplémentaires dans E), $\overrightarrow{x_F} - \vec{f} - (\beta_1 + .. + \beta_p)\vec{a} = \overrightarrow{O_E}$ et $\beta_1\vec{u}_1 + \beta_2\vec{u}_2 + .. + \beta_p\vec{u}_p - \overrightarrow{x_G} = \overrightarrow{O_E}$.

Alors, $\overrightarrow{x_G} = \beta_1\vec{u}_1 + \beta_2\vec{u}_2 + .. + \beta_p\vec{u}_p$. Donc, $(\beta_1, \dots, \beta_p)$sont les (uniques) composantes de $\overrightarrow{x_G}$ dans la base $\mathscr{G}$de G.
Alors, $\vec{h} = \beta_1(\vec{a} + \vec{u}_1) + \beta_2(\vec{a} + \vec{u}_2) + .. + \beta_p(\vec{a} + \vec{u}_p)\ et\ \vec{f} = \overrightarrow{x_F} - (\beta_1 + .. + \beta_p)\vec{a}$.
J'en conclus que si de tels vecteurs $\vec{f}\ et\ \vec{h}$ existent alors ils sont uniques et valent :
$\vec{h} = \beta_1(\vec{a} + \vec{u}_1) + \beta_2(\vec{a} + \vec{u}_2) + .. + \beta_p(\vec{a} + \vec{u}_p)\ et\ \vec{f} = \overrightarrow{x_F} - (\beta_1 + .. + \beta_p)\vec{a}$ où $(\beta_1, \dots, \beta_p)$sont les (uniques) composantes de $\overrightarrow{x_G}$ dans la base $\mathscr{G}$ de G

Synthèse : Posons $\vec{h} = \beta_1(\vec{a} + \vec{u}_1) + \beta_2(\vec{a} + \vec{u}_2) + .. + \beta_p(\vec{a} + \vec{u}_p)\ et\ \vec{f} = \overrightarrow{x_F} - (\beta_1 + .. + \beta_p)\vec{a}$ où $(\beta_1, \dots, \beta_p)$sont les (uniques) composantes de $\overrightarrow{x_G}$ dans la base $\mathscr{G}$ de G

Alors $\vec{h} = \beta_1(\vec{a} + \vec{u}_1) + \beta_2(\vec{a} + \vec{u}_2) + .. + \beta_p(\vec{a} + \vec{u}_p) \in G_{\vec{a}}$ par définition de $G_{\vec{a}}$ et $\vec{f} = \overrightarrow{x_F} - (\beta_1 + .. + \beta_p)\vec{a} \in F$ car F stable par c.l. Et,

$$\vec{h} + \vec{f} = \beta_1(\vec{a} + \vec{u}_1) + \beta_2(\vec{a} + \vec{u}_2) + .. + \beta_p(\vec{a} + \vec{u}_p) + \overrightarrow{x_F} - (\beta_1 + .. + \beta_p)\vec{a}$$

$$\vec{h} + \vec{f} = \underbrace{\beta_1\vec{u}_1 + \beta_2\vec{u}_2 + .. + \beta_p\vec{u}_p}_{=\overrightarrow{x_G}\text{ par def° des scalaires }\beta_k} + (\beta_1 + .. + \beta_p)\vec{a} + \overrightarrow{x_F} - (\beta_1 + .. + \beta_p)\vec{a} = \overrightarrow{x_G} + \overrightarrow{x_F} = \vec{x}\,.$$

Ainsi, $\vec{h}$ et $\vec{f}$ conviennent et sont les seuls qui conviennent d'après l'analyse. Ainsi, le vecteur $\vec{x}$ quelconque dans E s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de F et d'un élément de $G_{\vec{a}}$. J'en conclus que $F \oplus G_{\vec{a}}$=E.

   b. $(\vec{a} + \vec{u}_1, \vec{a} + \vec{u}_2, .., \vec{a} + \vec{u}_p)$ est une famille génératrice finie de $G_{\vec{a}}$ donc $G_{\vec{a}}$ est de dimension finie. Montrons la liberté de cette famille. Soit $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$des scalaires tels que $\beta_1(\vec{a} + \vec{u}_1) + \beta_2(\vec{a} + \vec{u}_2) + .. + \beta_p(\vec{a} + \vec{u}_p) = \overrightarrow{O_E}$.

Alors, $\underbrace{-(\beta_1+..+\beta_p)\vec{a}}_{\in F} = \underbrace{\beta_1\vec{u}_1+\beta_2\vec{u}_2+..+\beta_p\vec{u}_p}_{\in G}$. Donc, $\beta_1\vec{u}_1+\beta_2\vec{u}_2+..+\beta_p\vec{u}_p \ \in F\cap G$. Or, $F\cap G$ ne contient que $\overrightarrow{O_E}$,
$\beta_1\vec{u}_1+\beta_2\vec{u}_2+..+\beta_p\vec{u}_p = \overrightarrow{O_E}$. Comme $\mathscr{L}$ est libre, $\beta_1 =..= \beta_p = 0$ *et* ainsi, $(\vec{a}+\vec{u}_1, \vec{a}+\vec{u}_2, .., \vec{a}+\vec{u}_p)$est libre.
Ainsi, $(\vec{a}+\vec{u}_1, \vec{a}+\vec{u}_2, .., \vec{a}+\vec{u}_p)$est une base de $G_{\vec{a}}$ et par conséquent, $\dim(G_{\vec{a}}) = p$.

5. Ici E est de dimension finie p, de base $\mathscr{B}= (\vec{e}_i)_{i=1..p}$. On pose : $\forall k\in [\![1,p-1]\!], \overrightarrow{\varepsilon_k} = \vec{e}_k - (\vec{e}_{k+1}+\vec{e}_{k+2}+..+\vec{e}_p)$ et $\overrightarrow{\varepsilon_p} = \overrightarrow{e_p}$. Montrons que $\mathscr{B}' = (\overrightarrow{\varepsilon_i})_{i=1..p}$est une base de E.

Soit P=$mat_{\mathscr{B}}\mathscr{B}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & & \vdots & 0 \\ -1 & -1 & 1 & \dots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & & -1 & 1 \end{pmatrix}$. P est triangulaire inf. sans zéro sur la diagonale donc P est inversible.
Ainsi, $\mathscr{B}'$est une base de E.
Soit $\vec{x}\in E$ tel que $\vec{x} = x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+..+x_p\vec{e}_p$ *et* $\vec{x} = y_1\vec{\varepsilon}_1+y_2\vec{\varepsilon}_2+..+y_p\vec{\varepsilon}_p$.
Exprimons $(y_1,y_2,\dots,y_p)$en fonction de $(x_1,x_2,\dots,x_p)$.

On a $\left\{\begin{aligned} \overrightarrow{\varepsilon_1} &= \vec{e}_1 - (\vec{e}_2+\vec{e}_3+..+\vec{e}_p) \\ \overrightarrow{\varepsilon_2} &= \vec{e}_2 - (\vec{e}_3+\vec{e}_4+..+\vec{e}_p) \\ \overrightarrow{\varepsilon_3} &= \vec{e}_3 - (\vec{e}_4+\vec{e}_5+..+\vec{e}_p) \\ &\vdots \\ \overrightarrow{\varepsilon_{p-3}} &= \vec{e}_{p-3} - (\vec{e}_{p-2}+\vec{e}_{p-1}+\vec{e}_p) \\ \overrightarrow{\varepsilon_{p-2}} &= \vec{e}_{p-2} - (\vec{e}_{p-1}+\vec{e}_p) \\ \overrightarrow{\varepsilon_{p-1}} &= \vec{e}_{p-1} - \vec{e}_p \\ \overrightarrow{\varepsilon_p} &= \vec{e}_p \end{aligned}\right.$ donc $\left\{\begin{aligned} \overrightarrow{\varepsilon_1} &= \vec{e}_1 - (\vec{e}_2+\vec{e}_3+..+\vec{e}_p) \\ \overrightarrow{\varepsilon_2} &= \vec{e}_2 - (\vec{e}_3+\vec{e}_4+..+\vec{e}_p) \\ \overrightarrow{\varepsilon_3} &= \vec{e}_3 - (\vec{e}_4+\vec{e}_5+..+\vec{e}_p) \\ &\vdots \\ \overrightarrow{\varepsilon_{p-3}} &= \vec{e}_{p-3} - (\vec{e}_{p-2}+\vec{e}_{p-1}+\vec{e}_p) \\ \overrightarrow{\varepsilon_{p-2}} &= \vec{e}_{p-2} - (\overrightarrow{\varepsilon_{p-1}}+\overrightarrow{\varepsilon_p}+\overrightarrow{\varepsilon_p}) \\ \overrightarrow{\varepsilon_{p-1}}+\overrightarrow{\varepsilon_p} &= \vec{e}_{p-1} \\ \overrightarrow{\varepsilon_p} &= \vec{e}_p \end{aligned}\right.$ donc $\left\{\begin{aligned} \overrightarrow{\varepsilon_1} &= \vec{e}_1 - (\vec{e}_2+\vec{e}_3+..+\vec{e}_p) \\ \overrightarrow{\varepsilon_2} &= \vec{e}_2 - (\vec{e}_3+\vec{e}_4+..+\vec{e}_p) \\ \overrightarrow{\varepsilon_3} &= \vec{e}_3 - (\vec{e}_4+\vec{e}_5+..+\vec{e}_p) \\ &\vdots \\ \overrightarrow{\varepsilon_{p-3}} &= \vec{e}_{p-3} - (\overrightarrow{\varepsilon_{p-2}}+\overrightarrow{\varepsilon_{p-1}}+2\overrightarrow{\varepsilon_p}+\overrightarrow{\varepsilon_{p-1}}+\overrightarrow{\varepsilon_p}+\overrightarrow{\varepsilon_p}) \\ \overrightarrow{\varepsilon_{p-2}}+\overrightarrow{\varepsilon_{p-1}}+2\overrightarrow{\varepsilon_p} &= \vec{e}_{p-2} \\ \overrightarrow{\varepsilon_{p-1}}+\overrightarrow{\varepsilon_p} &= \vec{e}_{p-1} \\ \overrightarrow{\varepsilon_p} &= \vec{e}_p \end{aligned}\right.$

donc $\left\{\begin{aligned} \overrightarrow{\varepsilon_1} &= \vec{e}_1 - (\vec{e}_2+\vec{e}_3+..+\vec{e}_p) \\ \overrightarrow{\varepsilon_2} &= \vec{e}_2 - (\vec{e}_3+\vec{e}_4+..+\vec{e}_p) \\ \overrightarrow{\varepsilon_3} &= \vec{e}_3 - (\vec{e}_4+\vec{e}_5+..+\vec{e}_p) \\ &\vdots \\ \overrightarrow{\varepsilon_{p-3}}+\overrightarrow{\varepsilon_{p-2}}+2\overrightarrow{\varepsilon_{p-1}}+4\overrightarrow{\varepsilon_p} &= \vec{e}_{p-3} \\ \overrightarrow{\varepsilon_{p-2}}+\overrightarrow{\varepsilon_{p-1}}+2\overrightarrow{\varepsilon_p} &= \vec{e}_{p-2} \\ \overrightarrow{\varepsilon_{p-1}}+\overrightarrow{\varepsilon_p} &= \vec{e}_{p-1} \\ \overrightarrow{\varepsilon_p} &= \vec{e}_p \end{aligned}\right.$.

Conjecture $\forall k\geq 1, H(k)$: "$\vec{e}_{p-k} = \overrightarrow{\varepsilon_{p-k}} + \sum_{j=p-k+1}^{p} 2^{j-(p-k+1)}\overrightarrow{\varepsilon_j} \overset{j=p-l}{\hat{=}} \overrightarrow{\varepsilon_{p-k}} + \left(\sum_{l=0}^{k-1} 2^{k-1-l}\,\overrightarrow{\varepsilon_{p-l}}\right) \overset{l=k-i}{\hat{=}} \overrightarrow{\varepsilon_{p-k}} + \left(\sum_{i=1}^{k} 2^{i-1}\,\overrightarrow{\varepsilon_{p-k+i}}\right)$ ".
Preuve de cette conjecture â récurrence finie montante et forte. : $H(1)$vraie. Soit $k\in [\![2,p-1]\!]$. Supposons $H(1),\dots,H(k-1)$ *vraies*.
Alors $\overrightarrow{\varepsilon_{p-k}} = \vec{e}_{p-k} - (\vec{e}_{p-(k-1)}+\vec{e}_{p-(k-2)}+..+\vec{e}_p) = \vec{e}_{p-k} - \left(\sum_{m=1}^{k-1}\vec{e}_{p-m}\right) - \overrightarrow{\varepsilon_p}$

$$\overset{\substack{car\\ H(0),H(1),\dots,H(k-1)\\ vraies}}{\hat{=}} \quad \vec{e}_{p-k} - \left(\sum_{m=1}^{k-1}\left(\overrightarrow{\varepsilon_{p-m}} + \sum_{j=p-m+1}^{p} 2^{j-(p-m+1)}\overrightarrow{\varepsilon_j}\right)\right) - \overrightarrow{\varepsilon_p}$$

Donc, $\vec{e}_{p-k} = \overrightarrow{\varepsilon_{p-k}} + \left(\sum_{m=1}^{k-1}\left(\overrightarrow{\varepsilon_{p-m}} + \sum_{j=p-m+1}^{p} 2^{j-(p-m+1)}\overrightarrow{\varepsilon_j}\right)\right) + \overrightarrow{\varepsilon_p} = \overrightarrow{\varepsilon_{p-k}} + \left(\sum_{m=1}^{k-1}\overrightarrow{\varepsilon_{p-m}}\right) + \sum_{m=1}^{k-1}\sum_{j=p-m+1}^{p} 2^{j-(p-m+1)}\overrightarrow{\varepsilon_j} + \overrightarrow{\varepsilon_p}$

$$= \overrightarrow{\varepsilon_{p-k}} + \left(\sum_{m=1}^{k-1}\overrightarrow{\varepsilon_{p-m}}\right) + \sum_{j=p-k+2}^{p}\ \sum_{m=p+1-j}^{k-1} 2^{j-(p-m+1)}\overrightarrow{\varepsilon_j} + \overrightarrow{\varepsilon_p}$$

$$\vec{e}_{p-k} = \overrightarrow{\varepsilon_{p-k}} + \left(\sum_{m=1}^{k-1}\overrightarrow{\varepsilon_{p-m}}\right) + \sum_{j=p-k+2}^{p}\left(\sum_{m=p+1-j}^{k-1} 2^{j-(p-m+1)}\right)\overrightarrow{\varepsilon_j} + \overrightarrow{\varepsilon_p}$$

Or, $\sum_{m=p+1-j}^{k-1} 2^{j-(p-m+1)} = \underbrace{\sum_{r=0}^{j+k-p-2} 2^r}_{somme\ géométrique} = 2^{j+k-p-1} - 1$. Donc,

$$\vec{e}_{p-k} = \overrightarrow{\varepsilon_{p-k}} + \left(\sum_{m=1}^{k-1}\overrightarrow{\varepsilon_{p-m}}\right) + \left(\sum_{j=p-k+2}^{p}(2^{j+k-p-1}-1)\,\overrightarrow{\varepsilon_j}\right) + \overrightarrow{\varepsilon_p} = \overrightarrow{\varepsilon_{p-k}} + \left(\sum_{m=1}^{k-1}\overrightarrow{\varepsilon_{p-m}}\right) + \left(\sum_{l=0}^{k-2}(2^{k-1-l}-1)\,\overrightarrow{\varepsilon_{p-l}}\right) + \overrightarrow{\varepsilon_p}$$

$$= \overrightarrow{\varepsilon_{p-k}} + \left(\sum_{m=1}^{k-2}\overrightarrow{\varepsilon_{p-m}}\right) + \left(\sum_{l=1}^{k-2}(2^{k-1-l}-1)\,\overrightarrow{\varepsilon_{p-l}}\right) + \overrightarrow{\varepsilon_p} + (2^{k-1}-1)\,\overrightarrow{\varepsilon_p} + \overrightarrow{\varepsilon_{p-k+1}}$$

$$= \overrightarrow{\varepsilon_{p-k}} + \left(\sum_{l=1}^{k-2} 2^{k-1-l}\,\overrightarrow{\varepsilon_{p-l}}\right) + 2^{k-1}\,\overrightarrow{\varepsilon_p} + \overrightarrow{\varepsilon_{p-k+1}}$$

$$= \overrightarrow{\varepsilon_{p-k}} + \left(\sum_{l=0}^{k-1} 2^{k-1-l}\,\overrightarrow{\varepsilon_{p-l}}\right) = \overrightarrow{\varepsilon_{p-k}} + \left(\sum_{j=p-(k-1)}^{p} 2^{j-p-(k-1)}\overrightarrow{\varepsilon_j}\right). \quad OK !!$$

Ccl: $\forall k\in [\![1,p-1]\!], H(k)$: "$\vec{e}_{p-k} = \overrightarrow{\varepsilon_{p-k}} + \sum_{j=p-k+1}^{p} 2^{j-(p-k+1)}\overrightarrow{\varepsilon_j} = \overrightarrow{\varepsilon_{p-k}} + \left(\sum_{l=0}^{k-1} 2^{k-1-l}\,\overrightarrow{\varepsilon_{p-l}}\right)$" est vraie.

Alors, $y_1\vec{\varepsilon}_1 + y_2\vec{\varepsilon}_2+..+y_p\vec{\varepsilon}_p = \vec{x} = \sum_{k=0}^{p-1} x_{p-k}\vec{e}_{p-k} = \sum_{k=1}^{p-1} x_{p-k}\vec{e}_{p-k} + x_p\vec{e}_p$

$$= \sum_{k=1}^{p-1} x_{p-k}\left(\overrightarrow{\varepsilon_{p-k}} + \left(\sum_{l=0}^{k-1} 2^{k-1-l}\,\overrightarrow{\varepsilon_{p-l}}\right)\right) + x_p\vec{\varepsilon}_p = \sum_{k=1}^{p-1}\left(x_{p-k}\overrightarrow{\varepsilon_{p-k}} + \left(\sum_{l=0}^{k-1} x_{p-k}2^{k-1-l}\,\overrightarrow{\varepsilon_{p-l}}\right)\right) + x_p\vec{\varepsilon}_p$$

$$= \sum_{k=1}^{p-1} x_{p-k}\overrightarrow{\varepsilon_{p-k}} + \left(\sum_{k=1}^{p-1}\sum_{l=0}^{k-1} x_{p-k}2^{k-1-l}\,\overrightarrow{\varepsilon_{p-l}}\right) + x_p\vec{\varepsilon}_p \;=\; \sum_{k=1}^{p-1} x_{p-k}\overrightarrow{\varepsilon_{p-k}} + \left(\sum_{l=0}^{p-2}\sum_{k=l+1}^{p-1} x_{p-k}2^{k-1-l}\,\overrightarrow{\varepsilon_{p-l}}\right) + x_p\vec{\varepsilon}_p$$

$$= \sum_{k=1}^{p-1} x_{p-k}\overrightarrow{\varepsilon_{p-k}} + \left(\sum_{l=0}^{p-2}\left(\sum_{k=l+1}^{p-1} x_{p-k}2^{k-1-l}\right)\overrightarrow{\varepsilon_{p-l}}\right) + x_p\vec{\varepsilon}_p$$

$$= x_1\vec{\varepsilon_1} + \left(\sum_{k=1}^{p-1} x_{p-k}2^{k-1}\right)\vec{\varepsilon_p} + \left(\sum_{l=1}^{p-2}\left(x_{p-l} + \sum_{k=l+1}^{p-1} x_{p-k}2^{k-1-l}\right)\overrightarrow{\varepsilon_{p-l}}\right) + x_p\vec{\varepsilon}_p$$

$$= x_1\vec{\varepsilon_1} + \left(\sum_{l=1}^{p-2}\left(x_{p-l} + \sum_{k=l+1}^{p-1} x_{p-k}2^{k-1-l}\right)\overrightarrow{\varepsilon_{p-l}}\right)\left(\sum_{k=1}^{p-1} x_{p-k}2^{k-1} + x_p\right)\vec{\varepsilon_p}$$

Donc, $y_1 = x_1$ et $\forall l \in [\![1, p-2]\!], y_{p-l} = \left(x_{p-l} + \sum_{k=l+1}^{p-1} x_{p-k}2^{k-1-l}\right)$ et $y_p = \sum_{k=1}^{p-1} x_{p-k}2^{k-1} + x_p$.

Ex9* $E = \mathbb{R}^n$, $U = (1,1,..,1,1) \in \mathbb{R}^n$ et $F = vect(U)$ et $G = \{(x_1, x_2, .., x_n) \in \mathbb{R}^n / \sum_{k=1}^{n} x_k = 0\}$. Justifier que F et G sont des ss-e-v de E et déterminer leur dimension. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.

1. U est un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$ donc G est le ss-e-v de $\mathbb{R}^n$ de base (U).
   $G = \{(x_1, x_2, .., x_n) \in \mathbb{R}^n / x_1 + x_2 + .. + x_n = 0\} = \{(x_1, x_2, .., x_n) \in \mathbb{R}^n / x_1 = -x_2 - x_3 .. - x_n\}$
   $G = \{(-x_2 - x_3 .. - x_n, x_2, .., x_n) / (x_2, .., x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}\}$
   $G = \{x_2(-1,1,0,0,..,0) + x_3(-1,0,1,0,..,0) + \cdots + x_n(-1,0,0,..,1) / (x_2, .., x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}\} =$
   $G = vect\big((-1,1,0,0,..,0), (-1,0,1,0,..,0), \dots, (-1,0,0,..,1)\big)$.
   De plus, $\big((-1,1,0,0,..,0), (-1,0,1,0,..,0), \dots, (-1,0,0,..,1)\big)$ est échelonnée en 0 (par la droite) donc est libre. Par conséquent, comme $(-1,1,0,0,..,0), (-1,0,1,0,..,0), \dots, (-1,0,0,..,1)$sont des vecteurs de $\mathbb{R}^n$, je peux conclure que G est le ss-e-v de $\mathbb{R}^n$ de base $\mathscr{G}$=$\big((-1,1,0,0,..,0), (-1,0,1,0,..,0), \dots, (-1,0,0,..,1)\big)$
2. Soit $\mathscr{B}_c$ =$\big((1,0,\dots,0), (0,1,0,0,..,0), (0,0,1,0,..,0), \dots, (0,0,0,..,1)\big)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et
3. $\mathscr{B}$= $\big((1,1,..,1,1), (-1,1,0,0,..,0), (-1,0,1,0,..,0), \dots, (-1,0,0,..,1)\big)$ la concaténation de la base de F et celle de G trouvées précédemment et $H = vect(\mathscr{B})$.
   Alors $P = mat_{\mathscr{B}_c}\mathscr{B}$= $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & 1 & 0 & & 0 \\ 1 & 0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \\ 1 & \vdots & \vdots & & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{pour\ j\in[\![2,n-1]\!],\\ C_j \leftarrow C_j - C_n}}{\underbrace{\sim}_{c}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & & & 0 \\ 1 & 0 & 1 & & & \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 & \\ 1 & \vdots & \vdots & & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix}$
   $\underset{C_n \leftarrow C_n + C_1}{\underbrace{\sim}_{c}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & & & 1 \\ 1 & 0 & 1 & & & 1 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 & \\ 1 & \vdots & \vdots & & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix} \underset{C_n \leftarrow C_n + C_2 + C_3 + .. + C_{n-1}}{\underbrace{\sim}_{c}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & & & 0 \\ 1 & 0 & 1 & & & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 & \\ 1 & \vdots & \vdots & & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
   Donc $rgP = n$. Ainsi, P est inversible et par conséquent, $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^n$. Alors le théorème de caractérisation de supplémentaires par concaténation des bases, je peux conclure que $F \oplus G$=$\mathbb{R}^n$.

Ex 10**Soit $F = \{(x \mapsto ach(x) + bsh(x)) / (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ et $G = \{f \in D(\mathbb{R}, \mathbb{R}\} / f(0) = f'(0) = 0\}$.
1. Montrer que F et G sont deux ss-e-v de $D(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Déterminer la dimension de F.
2. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $D(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. En déduire la dimension de G.
3. Décomposer exp puis cos dans cette somme directe.
4. Donner un plan vectoriel de $D(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui n'est pas supplémentaire de G dans $D(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
5. $\forall k \in \mathbb{N}^*, f_k : t \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{k}{t^2}}\ si\ t \neq 0 \\ 0\ si\ t = 0 \end{cases}$. Montrer que$\forall n \in \mathbb{N}$, $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ est une famille libre de **<u>vecteurs de G.</u>** Qu'en déduit-on à nouveau sur G ?

1. $f = vect(\,ch, sh)$. Or ch et sh sont dérivables sur $\mathbb{R}$, f est un ss-e-v de $D(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. De plus, pour tous réels a et b, $ach + bsh = \omega \Longrightarrow \forall x, ach(x) + bsh(x) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ \frac{a}{2}\left(e + \frac{1}{e}\right) + \frac{b}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$. Donc (ch, sh) est libre et est ainsi une base de F et $dimF = 2$.
   G $\subset D(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
   La fonction nulle ω est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie$\omega(0) = 0$ et $\omega'(0) = 0$. Par conséquent, $\omega \in G$.
   Soit g et h deux éléments de G et a et b deux réels. Alors $ag + bh \in D(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ car $D(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est stable par combinaison linéaire et $(ag + bh)(0) = a \underbrace{g(0)}_{\substack{=0\ car\\ g\in G}} + b \underbrace{h(0)}_{\substack{=0\ car\\ g\in G}} = 0$ et $(ag + bh)'(0) = a \underbrace{g'(0)}_{\substack{=0\ car\\ g\in G}} + b \underbrace{h'(0)}_{\substack{=0\ car\\ g\in G}} = 0$. Ainsi, $ab + bg \in G$.
   J'en conclus que G est un ss-e-v de $D(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

2. Montrons que tout élément de $D(\mathbb{R},\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique comme somme d'une élément de G et d'un élément de F. Prenons donc un élément φ quelconque de $D(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
Analyse : supposons qu'il existe $f \in F$ et $g \in G$ telles que $\varphi = g + f$. Alors : il existe deux réels a et b tels que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ach(x) + bsh(x)\ \ et\ g(0) = g'(0) = 0\ et\ \forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = g(x) + ach(x) + bsh(x)$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi'^{(x)} = g'(x) + ash(x) + bch(x)$.
Alors, $\varphi(0) = a\ et\ \ \varphi'(0) = b$. Donc, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \varphi'(0)sh(x) + \varphi(0)ch(x)\ et\ g(x) = \varphi(x) - [\varphi'(0)sh(x) + \varphi(0)ch(x)]$. Ainsi, si de telles fonctions f et g existent, elles sont uniques et valent $\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} f(x) = \varphi'(0)sh(x) + \varphi(0)ch(x) \\ g(x) = \varphi(x) - [\varphi'(0)sh(x) + \varphi(0)ch(x)] \end{cases}$.
Synthèse : posons $\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} f(x) = \varphi'(0)sh(x) + \varphi(0)ch(x) \\ g(x) = \varphi(x) - [\varphi'(0)sh(x) + \varphi(0)ch(x)] \end{cases}$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + g(x) = \varphi(x)$, $f \in F$ et $g = \varphi - f\ est\ dérivable\ sur\ \mathbb{R}\ et\ \ g(0) = \varphi(x) - [\varphi(0)] = 0\ et\ g'(0) = \varphi'(0) - [\varphi'(0)] = 0$ donc $g \in G$. Ainsi f et g conviennent et sont les seules qui conviennent d'après l'analyse. Donc toute fonction φ de $D(\mathbb{R},\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique comme somme d'une fonction de F et d'une fonction G et l'écriture est :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \underbrace{[\varphi'(0)sh(x) + \varphi(0)ch(x)]}_{\substack{=f(x) \\ et\ f\in F}} + \underbrace{[\varphi(x) - [\varphi'(0)sh(x) + \varphi(0)ch(x)]]}_{\substack{=g(x) \\ et\ g\in G}}.$$
Ainsi F et G sont supplémentaires dans $D(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Par conséquent, comme $D(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est de dimension infinie et F est de dimension finie, nécessairement, G est dimension infinie.
3. $\forall x \in \mathbb{R}, exp(x) = \underbrace{[ch(x) + sh(x)]}_{\substack{=f(x) \\ et\ f\in F}} + \underbrace{[0]}_{\substack{=g(x) \\ et\ g\in G}}$.
$$\forall x \in \mathbb{R}, cos(x) = \underbrace{[ch(x)]}_{\substack{=f(x) \\ et\ f\in F}} + \underbrace{[cos(x) - ch(x)]}_{\substack{=g(x) \\ et\ g\in G}}.$$
4. Prenons $H = \text{vect}\big((x \mapsto x^3)\big)$. Comme $(x \mapsto x^3) \in G, (x \mapsto x^3) \in H \cap G$ et par conséquent, H et G ne sont pas supplémentaire dans $D(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
5. $\forall k \in \mathbb{N}^*, f_k : t \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{k}{t^2}}\ si\ t \neq 0 \\ 0\ si\ t = 0 \end{cases}$. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*, f_k \in G$.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. $g_k : (t \mapsto e^{-\frac{k}{t^2}})$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$et $g_k'(t) = \frac{k}{t^3}e^{-\frac{k}{t^2}}$.
$\lim\limits_{t\mapsto 0} -\frac{k}{t^2} = -\infty$ donc $\lim\limits_{t\to 0} g_k(t) = 0 = f_k(0)$.
Et $|g_k'(t)| = |k|\frac{1}{|t|^3}e^{-\frac{k}{t^2}} = |k|e^{-\frac{k}{t^2} - ln|t|^3} = |k|e^{-\frac{k}{t^2} - 3ln|t|} = |k|e^{-\frac{k}{t^2}(1 + \frac{3}{k}t^2 ln|t|)}$; alors, comme $\lim\limits_{t\mapsto 0} t^2 ln|t| = 0$, $\lim\limits_{t\mapsto 0} -\frac{k}{t^2}(1 + \frac{3}{k}t^2 ln|t|) = -\infty$ et ainsi, $\lim\limits_{t\to 0} g_k{}'(t) = 0$; le critère de dérivabilité assure que f_k est dérivable en 0 et $f_k'(0) = 0$. Ainsi, $f_k \in G$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons que $(f_1, \dots, f_n)$ est libre. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$des réels tels que $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_n f_n = \omega$.
Alors $\forall t \neq 0, \lambda_1 e^{-\frac{1}{t^2}} + \lambda_2 e^{-\frac{2}{t^2}} + \cdots + \lambda_n e^{-\frac{n}{t^2}} = 0$ donc $\forall t \neq 0, \lambda_1 + \lambda_2 e^{-\frac{1}{t^2}} + \cdots + \lambda_n e^{-\frac{n-1}{t^2}} = 0$. En passant à la limite quand $t \to 0$, dans cette égalité, on obtient : $\lambda_1 = 0$. Alors, $\forall t \neq 0, \lambda_2 e^{-\frac{1}{t^2}} + \cdots + \lambda_n e^{-\frac{n-1}{t^2}} = 0$ donc $\forall t \neq 0, \lambda_2 + \lambda_3 e^{-\frac{1}{t^2}} + \cdots + \lambda_n e^{-\frac{n-2}{t^2}} = 0$.En passant à, nouveau, à la limite quand $t \to 0$, dans cette égalité, on obtient : $\lambda_2 = 0$. Alors, $\forall t \neq 0, \lambda_3 e^{-\frac{1}{t^2}} + \cdots + \lambda_n e^{-\frac{n-1}{t^2}} = 0$.... On itère ce procédé, et à la dernière étape nous avons : $\forall t \neq 0, \lambda_n e^{-\frac{1}{t^2}} = 0$ donc $\lambda_n = 0$. Ainsi, $(f_1, \dots, f_n)$ est libre dans G. Comme n est un entier quuelconque toute famille finie et extraite de $(f_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est libre ; j'en conclus que $(f_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$est libre dans G. G contient donc une famille infinie et libre ; G est donc de dimension infinie.