Programme de colle 27

Révision de la méthode de décomposition en éléments simples dans les cas simples $\frac{P}{Q}$ tq $degQ \leq 4$ et des applications : calcul intégral ($I = \int_0^1 \frac{1}{t^3+1} dt$), simplification de sommes ($S_n = \sum_{k=3}^{n} \frac{k}{k^3-2k^2-k+2}$), expression de dérivées nièmes ($f(x) = \frac{1-5x^3}{x^3-4x}$).

Chapitre 19 : Applications linéaires.

I Généralités

1. **Définition et règles de calcul**

$f \in \mathscr{L}(E,F)$ dans F lorsque f est une application de E dans F et $\forall(\vec{x},\vec{y}) \in E^2, \forall(\alpha,\beta) \in K^2, f(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}) = \alpha f(\vec{x}) + \beta f(\vec{y})$.

Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ alors $f(\overrightarrow{0_E}) = \overrightarrow{0_F}$ et $\forall(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},..,\overrightarrow{u_n}) \in E^n, \forall(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n) \in K^n, f(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \overrightarrow{u_k}) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f(\overrightarrow{u_k})$.

2. **Exemples.**

Application linéaire nulle : $\omega: E \to F \text{ telle que } \omega(\vec{x}) = \overrightarrow{0_F}$

Endomorphisme nul $\omega: E \to E \text{ telle que } \omega(\vec{x}) = \overrightarrow{0_E}$. Identité $id_E: E \to E \text{ telle que } id_E(\vec{x}) = \vec{x}$.

Homothétie h vectorielle de rapport $\alpha \in K^*$: $h: E \to E \text{ telle que } h(\vec{x}) = \alpha\vec{x}$.

Trace, transposition, opérateur Intégral, dérivation (…).

3. **Propriété fondamentale**

Soit $B = (\vec{e_i})_{i\in I}$ une base de l'espace vectoriel E et $(\vec{y_i})_{i\in I}$ une famille de vecteurs de F . Il existe une unique application linéaire f de E vers F qui vérifie : $\forall i \in I, f(\vec{e_i}) = \vec{y_i}$.

Une application linéaire f de E dans F est entièrement caractérisée par la donnée des images par f des vecteurs d'une base de E . Deux applications linéaires de E dans F coïncidant en tout vecteur d'une base de E sont égales (partout).

Soit $E = E_1 \oplus E_2$ et $u_1 \in \mathscr{L}(E_1,F)$ et $u_2 \in \mathscr{L}(E_2,F)$. Il existe une unique application linéaire u de E vers F tq : $u_{/E_1} = u_1$ et $u_{/E_2} = u_2$.

4. **Opérations sur les applications linéaires.**

Une combinaison linéaire ou une composée d'applications linéaires ou une bijection réciproque d'un isomorphisme est linéaire.

Calculs dans $\mathscr{L}(E)$: $\forall(\boldsymbol{f,g,u,v}) \in \mathscr{L}(\boldsymbol{E})^4, \forall(\boldsymbol{\alpha,\beta,a,b}) \in \boldsymbol{K}^4$, $\boldsymbol{(\alpha f+\beta g)\circ(au+bv) = \alpha a(f\circ u) + \alpha b(f\circ v) + \beta(g\circ u) + \beta(g\circ v)}$.

Itérés d'un endomorphisme : Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. $f^0 = id_E$ et $\forall n\in\mathbb{N}, f^{n+1} = f^n \circ f = f \circ f^n = f\circ f\circ ...\circ f \in \mathscr{L}(E)$.

Formule du binôme de Newton et formule de factorisation : Si f et g sont deux endomorphismes de E tels que $\underbrace{f\circ g = g\circ f}_{f \text{ et } g \text{ commutent}}$, alors

1. $\forall(n,m,p,q) \in \mathbb{N}^4, (f\circ g)^n = f^n \circ g^n = g^n \circ f^n$ et $f^m \circ g^p \circ f^n \circ g^q = f^{m+n} \circ g^{p+q} = g^{p+q} \circ f^{m+n}$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}, (f+g)^n = (f+g)\circ(f+g)\circ ...\circ(f+g) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k \circ g^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{f^k g^{n-k}}_{f\circ f\circ..\circ f\circ g\circ g\circ...\circ g}$ (FBN).
3. $\forall n \in \mathbb{N}, f^{n+1} - g^{n+1} = (f-g)\circ(\sum_{k=0}^{n} f^k \circ g^{n-k}) = (f-g)(\sum_{k=0}^{n} f^k g^{n-k})$. (Formule de factorisation)

II Noyau, image et rang.

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

- $Kerf = \{\vec{x} \in E / f(\vec{x}) = \overrightarrow{0_F}\}$. Autrement dit, $\vec{x} \in Kerf \Leftrightarrow \vec{x} \in E$ et $f(\vec{x}) = \overrightarrow{0_F}$. $Kerf$ est un ss-e-v de E
- $Imf = \{f(\vec{x}) / \vec{x} \in E\}$. Autrement dit, $\vec{y} \in Imf \Leftrightarrow \exists\vec{x} \in E / \vec{y} = f(\vec{x})$. Imf est un ss-e-v de F.
- $rg(f) = dim(Im(f))$.
- Si $\mathscr{B} = (\vec{e_i})_{i\in I}$ est une famille génératrice de E alors $f(\mathscr{B}) = (f(\vec{e_i}))_{i\in I}$ est une famille génératrice de $Im(f)$ et $rg(f) = rg(f(\mathscr{B}))$.
- **Théorème du rang (admis)** : Si $dimE < +\infty$ alors $rg(f) + dimKer(f) = \dim(E)$.
- $rg(f) \leq \min(dimE, dimF)$.
- Si G est un ss e v de F alors $f^{-1}\langle G\rangle$, l'ensemble de tous les antécédents par f des éléments de G , est un ss e v de E
- Si H est un ss e v de E alors $f(H)$, l'ensemble de toutes les images par f des éléments de H , est un ss e v de F.
- Le ss e v H de E est <u>stable</u> par f lorsque $f(H) \subset H$ i.e. lorsque $\forall\vec{x} \in H, f(\vec{x}) \in H$ et dans ce cas, $f_H: \begin{pmatrix} H \to H \\ \vec{x} \mapsto f(\vec{x}) \end{pmatrix}$ est un endomorphisme de H appelé <u>l'endomorphisme induit</u> par f sur H .

III Application linéaire injective-surjective- bijective

- <u>**Caractérisations de l'injectivité, surjectivité et bijectivité d'une application linéaire**</u>

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

✓ $f \text{ est injective } \Leftrightarrow Ker(f) = \{\overrightarrow{0_E}\}$

✓ $f \text{ est surjective } \Leftrightarrow Im(f) = F$

✓ $f \text{ est isomorphisme de } E \text{ sur } F \Leftrightarrow Ker(f) = \{\overrightarrow{0_E}\} \text{ et } Im(f) = F$

Si $\mathscr{B} = (\vec{e_i})_{i\in I}$ est une base de E alors

✓ $f \text{ est injective } \Leftrightarrow (f(\vec{e_i}))_{i\in I}$ est une famille libre

✓ $f \text{ est surjective } \Leftrightarrow (f(\vec{e_i}))_{i\in I}$ est une famille génératrice de F

✓ $f \text{ est isomorphisme de } E \text{ sur } F \Leftrightarrow (f(\vec{e_i}))_{i\in I}$ est une base de F.

Si E est de dimension finie alors $f \text{ est injective } \Leftrightarrow rg(f) = dimE$

Si F est de dimension finie alors $f \text{ est surjective } \Leftrightarrow rg(f) = dimF$.

Si E et F sont de dimension finie alors f isomorphisme de E sur $F \iff dimE = rg(f) = dimF$.

Si $dimE = dimF < +\infty$ alors f est un isomorphisme de E sur $F \iff f$ est injective$\iff f$ est surjective de E sur F.

- **Conséquences :**
- E et F isomorphes $\Longrightarrow dimE = dimF$.
- $Si\ dimE = dimF < +\infty$ alors E t F sont isomorphes.

- Si G est un ss e v de F et f est un isomorphisme de E sur F alors $\dim(f^{-1}\langle G\rangle) = dimG$
- Si H est un ss e v de E et f est un isomorphisme de E sur F alors $dimf(H)$=dim H

Si h est un isomorphisme de G sur E et g un isomorphisme de F sur G alors $rg(f \circ g) = rg(f) = rg(g \circ f)$.

Si $g \in \mathscr{L}(F, G)$ alors $rg(g \circ f) \leq \min\,(rg(g), rg(f))$.

IV Equations linéaires

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $b \in F$. Notons (e): $f(x) = b$ l'équation linéaire d'inconnue $x \in E$

Si $b \notin Im(f)$ alors (e) n'admet aucune solution.

Si $b \in Im(f)$ alors (e) admet au moins une solution « particulière » x_0 et les solutions de (e) sont tous les éléments de E de la forme $x_0 + h$ tel que $h \in Ker(f)$ (i.e. h solution de l'équation homogène associée (eh): $f(x) = 0$)

V Projection et symétrie vectorielles

- Définition d'une projection et d'une symétrie vectorielle

Soit F et G deux ss-e-v de E tels que $F \oplus G = E. \forall x \in E, \exists!\, x_F \in F, \exists!\, x_G \in G / x = x_F + x_G$.
Alors $p(x) = x_F$ est le projeté de x sur F et parallèlement à G.
$q(x) = x_G$ est le projeté de x sur G et parallèlement à F.
s$(x) = x_F - x_G$ est le symétrique de x par rapport à F et parallèlement à G .

- Propriétés : $F = Im(p) = Ker(s - id) = Ker(q)$ et $\boldsymbol{G} = Ker(p) = Ker(s + id) = Im(q)$

p *est la projection sur* $Im(p)$ *et parallèlement à* $Ker(p)$.
s *est la symétrie par rapport à* $Ker(s - id)$ *parallèlement à* $Ker(s + id)$.
$p \circ p = p, \quad p + q = id_E \quad, q \circ p = 0 = p \circ q$
$s \circ s = id, \quad s = 2p - id_E = p - q = id - 2q$
$Ker(p) \oplus Im(p) = E$ et $Ker(s + id) \oplus Ker(s - id) = E$
$Ker(p - id) = Im(p)\ ,\ p_{Im(p)} = id_{Im(p)}\ et\ \ p_{Ker(p)} = 0.$

- Définition d'une projecteur et d'une involution

Lorsque $p \in \mathcal{L}(E)$ et $p \circ p = p$ alors p est un projecteur.
Lorsque $s \in \mathcal{L}(E)$ et $s \circ s = id$ alors s est un involution.

- Deux caractérisations d'une projection vectorielle si Ede dimension quelconque :

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. p projection $\iff$ $p \circ p = p \iff Ker(p) \oplus Im(p) = E$ et $p_{Im(p)} = id$

- Trois caractérisations d'une symétrie vectorielle si Ede dimension quelconque :

Soit $s \in \mathcal{L}(E)$. s symétrie$\iff$½ $(s + id)$ projecteur$\iff$ $s \circ s = id \iff Ker(s - id) \oplus Ker(s + id) = E$.

VI Hyperplans et formes linéaires

- Définition d'un hyperplan

Un ss-e-v H de E est un hyperplan de E lorsque H lorsqu'il existe une droite vectorielle de E supplémentaire de H dans E.

- Caractérisations d'un hyperplan

Un ss-e-v H de E est un hyperplan de E sietssi $\forall a \in E \backslash H, H \oplus vect(a) = E$
Sietssi il existe une forme linéaire non nulle φ telle que $H = Ker(\varphi)$.

- Caractérisations d'un hyperplan dans un K-e-v de dimension finie

On suppose que E est de dimension n et $B = (e_i)_{i=1..n}$une base de E.
Un ss-e-v H de E est un hyperplan de E sietssi $dimH = dimE - 1$
sietssi il existe $a_1, .., a_n$ *scalaires non tous nuls tels que* $H = \{\sum_{k=1}^{n} x_i e_i / \underbrace{\sum_{k=1}^{n} x_i a_i = 0}_{\text{équation de } H \text{ dans } B.}\}$

Question de cours : Savoir énoncer tout résultat de cours et savoir énoncer et démontrer les résultats suivants :

1) Soit B=$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, .., \vec{e}_n)$ une base du K-e-v E et $(\vec{y}_1, \vec{y}_2, .., \vec{y}_n)$ une famille de vecteurs du K-e-v F . Démontrer qu'il existe une et une seule application linéaire f de E dans F telle que $\forall k \in [\![1, n]\!], f(\overrightarrow{e_k}) = \overrightarrow{y_k}$.
2) Le théorème du rang .
3) Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$. Démontrer que $Ker(u)$ est un ss-e-v de E et u est injective sietssi $Ker(u) = \{\overrightarrow{0_E}\}$.
4) Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$. Démontrer que $Im(u)$ est un ss-e-v de F et si $(e_1, e_2 \dots, e_n)$ est une base de E, alors $(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$ est une famille génératrice de $Im(u)$.
5) Soit u et v deux endomorphismes de E . Soit $\lambda \in K$ et $k \in \mathbb{N}$. Compléter et justifier :
   a) $u \circ v = 0 \iff \cdots$
   b) $Ker(u^k) \dots Ker(u^{k+1})$ et $Im(u^k) \dots Im(u^{k+1})$.
   c) $Ker(u - \lambda id) = \{\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots\}$ est stable par u.

Savoir clairement énoncer les formules analogues dans le cas où f et g sont des endomorphismes d'une même K-e-v E.