

Programme de colle 28

Chapitre 20 : Applications linéaires.

I Généralités

1. Définition et règles de calcul

$f \in \mathcal{L}(E, F)$ dans F lorsque f est une application de E dans F et $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, \forall (\alpha, \beta) \in K^2, f(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \alpha f(\vec{x}) + \beta f(\vec{y})$.

Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ alors $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$ et $\forall (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n) \in E^n, \forall (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in K^n, f(\sum_{k=1}^n \alpha_k \vec{u}_k) = \sum_{k=1}^n \alpha_k f(\vec{u}_k)$.

2. Exemples.

Application linéaire nulle : $\omega: E \rightarrow F$ telle que $\omega(\vec{x}) = \vec{0}_F$

Endomorphisme nul $\omega: E \rightarrow E$ telle que $\omega(\vec{x}) = \vec{0}_E$. Identité $id_E: E \rightarrow E$ telle que $id_E(\vec{x}) = \vec{x}$.

Homothétie h vectorielle de rapport $\alpha \in K^*$: $h: E \rightarrow E$ telle que $h(\vec{x}) = \alpha\vec{x}$.

Endomorphisme f_A canoniquement de K^n associé à la matrice A de $M_n(K)$: $f: ((x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (y_1, y_2, \dots, y_n))$ telle que : $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Application linéaire de K^p dans K^n canoniquement associée à la matrice A de $M_{n,p}(K)$: $f: ((x_1, x_2, \dots, x_p) \mapsto (y_1, y_2, \dots, y_n))$ telle que :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

Trace, transposition, opérateur Intégral, dérivation (...).

3. Propriété fondamentale

Soit $B = (\vec{e}_i)_{i \in I}$ une base de l'espace vectoriel E et $(\vec{y}_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de F . Il existe une unique application linéaire f de E vers F qui vérifie : $\forall i \in I, f(\vec{e}_i) = \vec{y}_i$.

Une application linéaire f de E dans F est entièrement caractérisée par la donnée des images par f des vecteurs d'une base de E . Deux applications linéaires de E dans F coïncidant en tout vecteur d'une base de E sont égales (partout).

Soit $E = E_1 \oplus E_2$ et $u_1 \in \mathcal{L}(E_1, F)$ et $u_2 \in \mathcal{L}(E_2, F)$. Il existe une unique application linéaire u de E vers F tq : $u|_{E_1} = u_1$ et $u|_{E_2} = u_2$.

4. Opérations sur les applications linéaires.

Une combinaison linéaire ou une composée d'applications linéaires ou une bijection réciproque d'un isomorphisme est linéaire.

Calculs dans $\mathcal{L}(E)$: $\forall (f, g, u, v) \in \mathcal{L}(E)^4, \forall (\alpha, \beta, a, b) \in K^4, (\alpha f + \beta g) \circ (au + bv) = \alpha a(f \circ u) + \alpha b(f \circ v) + \beta a(g \circ u) + \beta b(g \circ v)$.

Itérés d'un endomorphisme : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. $f^0 = id_E$ et $\forall n \in \mathbb{N}, f^{n+1} = f^n \circ f = f \circ f^n = f \circ f \circ \dots \circ f \in \mathcal{L}(E)$.

Formule du binôme de Newton et formule de factorisation : Si f et g sont deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = g \circ f$, alors f et g commutent

- $\forall (n, m, p, q) \in \mathbb{N}^4, (f \circ g)^n = f^n \circ g^n = g^n \circ f^n$ et $f^m \circ g^p \circ f^n \circ g^q = f^{m+n} \circ g^{p+q} = g^{p+q} \circ f^{m+n}$.
- $\forall n \in \mathbb{N}, (f + g)^n = (f + g) \circ (f + g) \circ \dots \circ (f + g) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^k \circ g^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \underbrace{f^k g^{n-k}}_{f \circ f \circ \dots \circ f \circ g \circ \dots \circ g}$ (FBN).
- $\forall n \in \mathbb{N}, f^{n+1} - g^{n+1} = (f - g) \circ (\sum_{k=0}^n f^k \circ g^{n-k}) = (f - g) \circ (\sum_{k=0}^n f^k g^{n-k})$. (Formule de factorisation)

II Noyau, image et rang.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- $Ker f = \{\vec{x} \in E / f(\vec{x}) = \vec{0}_F\}$. Autrement dit, $\vec{x} \in Ker f \Leftrightarrow \vec{x} \in E$ et $f(\vec{x}) = \vec{0}_F$. $Ker f$ est un ss-e-v de E
- $Im f = \{f(\vec{x}) / \vec{x} \in E\}$. Autrement dit, $\vec{y} \in Im f \Leftrightarrow \exists \vec{x} \in E / \vec{y} = f(\vec{x})$. $Im f$ est un ss-e-v de F .
- $rg(f) = dim(Im(f))$.
- Si $\mathcal{B} = (\vec{e}_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice de E alors $f(\mathcal{B}) = (f(\vec{e}_i))_{i \in I}$ est une famille génératrice de $Im(f)$ et $rg(f) = rg(f(\mathcal{B}))$.
- Théorème du rang (admis)** : Si $dim E < +\infty$ alors $rg(f) + dim Ker(f) = dim(E)$.
- $rg(f) \leq \min(dim E, dim F)$.
- Si G est un ss e v de F alors $f^{-1}(G)$, l'ensemble de tous les antécédents par f des éléments de G , est un ss e v de E
- Si H est un ss e v de E alors $f(H)$, l'ensemble de toutes les images par f des éléments de H , est un ss e v de F .
- Le ss e v H de E est stable par f lorsque $f(H) \subset H$ i.e. lorsque $\forall \vec{x} \in H, f(\vec{x}) \in H$ et dans ce cas, $f_H: \begin{pmatrix} H \rightarrow H \\ \vec{x} \mapsto f(\vec{x}) \end{pmatrix}$ est un endomorphisme de H appelé l'endomorphisme induit par f sur H .

III Application linéaire injective-surjective- bijective

- Caractérisations de l'injectivité, surjectivité et bijectivité d'une application linéaire**

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- ✓ f est injective $\Leftrightarrow Ker(f) = \{\vec{0}_E\}$
- ✓ f est surjective $\Leftrightarrow Im(f) = F$
- ✓ f est isomorphisme de E sur $F \Leftrightarrow Ker(f) = \{\vec{0}_E\}$ et $Im(f) = F$

Si $\mathcal{B} = (\vec{e}_i)_{i \in I}$ est une base de E alors

- ✓ f est injective $\Leftrightarrow (f(\vec{e}_i))_{i \in I}$ est une famille libre
- ✓ f est surjective $\Leftrightarrow (f(\vec{e}_i))_{i \in I}$ est une famille génératrice de F
- ✓ f est isomorphisme de E sur $F \Leftrightarrow (f(\vec{e}_i))_{i \in I}$ est une base de F .

Si E est de dimension finie alors f est injective $\Leftrightarrow rg(f) = dim E$

Si F est de dimension finie alors f est surjective $\Leftrightarrow \text{rg}(f) = \dim F$.

Si E et F sont de dimension finie alors f isomorphisme de E sur $F \Leftrightarrow \dim E = \text{rg}(f) = \dim F$.

Si $\dim E = \dim F < +\infty$ alors f est un isomorphisme de E sur $F \Leftrightarrow f$ est injective $\Leftrightarrow f$ est surjective de E sur F .

• **Conséquences :**

• E et F isomorphes $\Rightarrow \dim E = \dim F$.

• Si $\dim E = \dim F < +\infty$ alors E et F sont isomorphes.

• Si G est un ss-e-v de F et f est un isomorphisme de E sur F alors $\dim(f^{-1}(G)) = \dim G$

• Si H est un ss-e-v de E et f est un isomorphisme de E sur F alors $\dim f(H) = \dim H$

Si h est un isomorphisme de G sur E et g un isomorphisme de F sur G alors $\text{rg}(f \circ g) = \text{rg}(f) = \text{rg}(g \circ f)$.

Si $g \in \mathcal{L}(F, G)$ alors $\text{rg}(g \circ f) \leq \min(\text{rg}(g), \text{rg}(f))$.

IV Projections et symétries vectorielles

• **Définition d'une projection et d'une symétrie vectorielle**

Soit F et G deux ss-e-v de E tels que $F \oplus G = E$. $\forall x \in E, \exists! x_F \in F, \exists! x_G \in G / x = x_F + x_G$.

Alors $p(x) = x_F$ est le projeté de x sur F et parallèlement à G .

$q(x) = x_G$ est le projeté de x sur G et parallèlement à F .

$s(x) = x_F - x_G$ est le symétrique de x par rapport à F et parallèlement à G .

• **Propriétés : $F = \text{Im}(p) = \text{Ker}(s - id) = \text{Ker}(q)$ et $G = \text{Ker}(p) = \text{Ker}(s + id) = \text{Im}(q)$**

p est la projection sur $\text{Im}(p)$ et parallèlement à $\text{Ker}(p)$.

s est la symétrie par rapport à $\text{Ker}(s - id)$ parallèlement à $\text{Ker}(s + id)$.

$p \circ p = p, p + q = id_E, q \circ p = 0 = p \circ q$

$s \circ s = id, s = 2p - id_E = p - q = id - 2q$

$\text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p) = E$ et $\text{Ker}(s + id) \oplus \text{Ker}(s - id) = E$

$\text{Ker}(p - id) = \text{Im}(p), p_{\text{Im}(p)} = id_{\text{Im}(p)}$ et $p_{\text{Ker}(p)} = 0$.

• **Définition d'un projecteur et d'une involution**

Lorsque $p \in \mathcal{L}(E)$ et $p \circ p = p$ alors p est un projecteur.

Lorsque $s \in \mathcal{L}(E)$ et $s \circ s = id$ alors s est une involution.

• **Deux caractérisations d'une projection vectorielle si E de dimension quelconque :**

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. p projection $\Leftrightarrow p \circ p = p \Leftrightarrow \text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p) = E$ et $p_{\text{Im}(p)} = id$

• **Trois caractérisations d'une symétrie vectorielle si E de dimension quelconque :**

Soit $s \in \mathcal{L}(E)$. s symétrie $\Leftrightarrow \frac{1}{2}(s + id)$ projecteur $\Leftrightarrow s \circ s = id \Leftrightarrow \text{Ker}(s - id) \oplus \text{Ker}(s + id) = E$.

V Hyperplans et formes linéaires

• **Définition d'un hyperplan**

Un ss-e-v H de E est un hyperplan de E lorsque H lorsqu'il existe une droite vectorielle de E supplémentaire de H dans E .

• **Caractérisations d'un hyperplan**

Un ss-e-v H de E est un hyperplan de E si et si $\forall a \in E \setminus H, H \oplus \text{vect}(a) = E$

Si et si il existe une forme linéaire non nulle φ telle que $H = \text{Ker}(\varphi)$.

VI Equations linéaires

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $b \in F$. Notons (e) : $f(x) = b$ l'équation linéaire d'inconnue $x \in E$

Si $b \notin \text{Im}(f)$ alors (e) n'admet aucune solution.

Si $b \in \text{Im}(f)$ alors (e) admet au moins une solution « particulière » x_0 et les solutions de (e) sont tous les éléments de E de la forme $x_0 + h$

tel que $h \in \text{Ker}(f)$ (i.e. h solution de l'équation homogène associée (eh) : $f(x) = 0$)

Chap 21 : Matrices d'une application linéaire.

ICI $\dim E = p$ et $\dim F = n$. $B_1 = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ une base de E et $B_2 = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ une base de F .

• **Définition d'une matrice d'une application linéaire de E dans F .**

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $B_1 = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ une base de E et B_2 une base de F . $\text{mat}_{B_1, B_2} f = \text{mat}_{B_2}(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_p))$

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $B = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ une base de E . $\text{mat}_B f = \text{mat}_{B, B} f = \text{mat}_B(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_p))$.

• **Propriété fondamentale permettant de calculer $f(\vec{x})$ à partir d'une matrice de f et celle de \vec{x} . Et sa réciproque.**

Propriété fondamentale

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $B_1 = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ une base de E et B_2 une base de F . $\forall x \in E, \text{mat}_{B_2} f(x) = \text{mat}_{B_1, B_2} f \times \text{mat}_{B_1}(x)$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $B = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ une base de E . $\forall x \in E, \text{mat}_B f(x) = \text{mat}_B f \times \text{mat}_B(x)$.

Réciproque : Soit f une application de E dans F .

Si il existe B_1 une base de E et B_2 une base de F et $M \in M_{n,p}(K)$ telles que $\forall x \in E, \text{mat}_{B_2} f(x) = M \times \text{mat}_{B_1}(x)$ alors f est linéaire et $M = \text{mat}_{B_1, B_2} f$.

• **Théorème d'isomorphisme entre $\mathcal{L}(E, F)$ et $M_{n,p}(K)$.**

$\nabla: \left(\begin{array}{l} \mathcal{L}(E, F) \rightarrow M_{n,p}(K) \\ f \mapsto \text{mat}_{B_1, B_2} f \end{array} \right)$ est un isomorphisme de $\mathcal{L}(E, F)$ et $M_{n,p}(K)$ et $\mathcal{L}(E, F)$ est de dimension $\dim E \times \dim F$.

En particulier,

Toute matrice de $M_{n,p}(K)$ est la matrice d'une application linéaire.

$\forall (f, g) \in \mathcal{L}(E, F)^2, \forall (a, b) \in K^2, \text{mat}_{B_1, B_2}(af + bg) = a \cdot \text{mat}_{B_1, B_2} f + b \cdot \text{mat}_{B_1, B_2} g$.

f est l'application linéaire de E dans F canoniquement associée à la matrice $A \in M_{n,p}(K)$ lorsque $A = \text{mat}_{B_1, B_2} f$ où B_1 base canonique de E et B_2 base canonique de F i.e. lorsque $\forall x \in E, \text{mat}_{B_2} f(x) = A \times \text{mat}_{B_1}(x)$ où B_1 base canonique de E et B_2 base canonique de F .
 f est l'endomorphisme de E canoniquement associée à la matrice $A \in M_p(K)$ lorsque $A = \text{mat}_B f$ où B base canonique de E i.e. lorsque f est l'application linéaire de E dans F telle que $\forall x \in E, \text{mat}_B f(x) = A \times \text{mat}_B(x)$ où B base canonique de E et B_2 base canonique de F .

- **Matrice d'une composée**

$\forall f \in \mathcal{L}(E, F), \forall g \in \mathcal{L}(F, G), \text{mat}_{B_1, B_3}(g \circ f) = \text{mat}_{B_2, B_3} g \times \text{mat}_{B_1, B_2} f$ où B_1, B_2, B_3 bases respectives de E, F et G

$\forall f \in \mathcal{L}(E), \forall k \in \mathbb{N}, \text{mat}_B(f^k) = (\text{mat}_B f)^k$ où B base de E .

- **Caractérisation matricielle du rang.**

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F), \text{rg}(\text{mat}_{B_1, B_2} f) = \text{rg}(f)$.

- **Caractérisation matricielle d'un isomorphisme**

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F), f$ est un isomorphisme de E sur $F \Leftrightarrow \text{mat}_{B_2, B_1} f$ est inversible. Et le cas échéant, $\text{mat}_{B_2, B_1}(f^{-1}) = (\text{mat}_{B_1, B_2} f)^{-1}$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E), f$ est un automorphisme de $E \Leftrightarrow \text{mat}_B f$ est inversible. Et le cas échéant, $\text{mat}_B(f^{-1}) = (\text{mat}_B f)^{-1}$.

- **Lecture matricielle de l'image. Recherche du noyau.**

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F), \text{Im}(f) = \text{vect}\left(\underbrace{f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_p)}_{\text{lecture dans les colonnes de } \text{mat}_{B_1, B_2} f}\right)$ et $\text{Ker}(f) = \left\{ \sum_{k=1}^p x_k e_k / \text{mat}_{B_1, B_2} f \times \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Méthode matricielle « tout en un » de détermination du rang, d'une base de $\text{Im} f$ et de $\text{Ker} f$ par opération sur les colonnes + théorème du rang.

- **Formule de changement de bases pour les applications linéaires. Cas particulier d'un endomorphisme.**

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F), B_1, B'_1$ deux bases de E et B_2, B'_2 deux bases de F . $\text{mat}_{B'_1, B'_2} f = \text{mat}_{B'_2, B_2} \times \text{mat}_{B_1, B_2} f \times \text{mat}_{B_1, B'_1}$

Soit $f \in \mathcal{L}(E), B, B'$ deux bases de E . $\text{mat}_{B'} f = P^{-1} \times \text{mat}_B f \times P$ où $P = \text{mat}_B B'$ matrice de passage de B à B' .

Les matrices M et M' sont semblables lorsqu'il existe $P \in GL_n(K)$ telle que $M' = P^{-1} \times M \times P$.

Les matrices M et M' sont semblables si et seulement si M et M' sont des matrices d'un même endomorphisme.

- **Deux caractérisations matricielles** d'une projection vectorielle si E de dimension finie :

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ et $M = \text{mat}_B p$ où B base quelconque de E .

p projection $\Leftrightarrow M^2 = M \Leftrightarrow$ il existe une base B' de E $\text{mat}_{B'} p = \text{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$;

- **Deux caractérisations matricielles** d'une symétrie vectorielle dans le cas où E de dimension finie :

Soit $s \in \mathcal{L}(E)$ et $M = \text{mat}_B s$ où B base quelconque de E .

s symétrie $\Leftrightarrow M^2 = I \Leftrightarrow$ il existe une base B de E tq : $\text{mat}_B s = \text{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$.

Question de cours

1) Le théorème du rang.

2) Soit u et v deux endomorphismes de E . Soit $\lambda \in K$ et $k \in \mathbb{N}$. Compléter et justifier :

a) $u \circ v = 0 \Leftrightarrow \dots$

b) $\text{Ker}(u^k) \dots \text{Ker}(u^{k+1})$ et $\text{Im}(u^k) \dots \text{Im}(u^{k+1})$.

c) $\text{Ker}(u - \lambda \text{id}) = \{ \dots \dots \dots \}$

3) Démontrer : s est une symétrie vectorielle dans E si et seulement si $s \circ s = \text{id}_E$

Si, de plus, $\dim E < +\infty$, alors

s est une symétrie vectorielle dans E si et seulement si il existe une base B de E telle que $\text{mat}_B s = \text{diag}(1, 1, \dots, 1, -1, -1, \dots, -1)$.

4) Démontrer la propriété fondamentale : calcul de $f(\vec{x})$ à partir des matrices de f et de \vec{x} dans de bonnes bases.