

TD 10

Dérivées nièmes. Comparaison des fonctions et développements limités.

I Dérivées d'ordre supérieur

Ex 1 Soit a, b, c et d constantes réelles et a non nulle. Justifier l'existence et calculer la dérivée $n^{\text{ième}}$ de chacune des fonctions suivantes sur un domaine à préciser :

- 1) $f : (x \mapsto \frac{cx+d}{ax+b})$.
- 2) $f : (x \mapsto \frac{1}{x^3+2x^2-x-2})$.
- 3) $f(x) = (3x^2 - x + 5)\sin(x\sqrt{3})e^x$
- 2) $f : (x \mapsto \frac{1}{x^2-b^2})$
- 5) $f : (x \mapsto (4x^2 - 3x + 1)\sin^2(x))$ (expression sous la forme $H(x) + P(x)\sin(2x) + Q(x)\cos(2x)$ où H, P et Q polynomiales)
- 6) $(x \mapsto x^n e^{3x})$ puis calculer $f^{(n)}(0)$.

Ex 2 Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer de deux manières la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $f : (x \mapsto x^{2n})$. En déduire $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$.

Ex 3 Soit $f \in D^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on définit g_n par : $\forall x > 0, g_n(x) = x^{n-1} f\left(\frac{1}{x}\right)$.

Justifier que $g_n \in D^n(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ et montrer, par récurrence sur n , que : $\forall x > 0, g_n^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)$.

Application : déterminer la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $(x \mapsto x^{n-1} \ln(x))$

Ex 4 Soit $f : (x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}})$.

a) Justifier que f est de classe C^∞ sur \mathbb{R} .

b) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, la dérivée $n^{\text{ième}}$ de f peut se mettre sous la forme :

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+\frac{1}{2}}}, \text{ où } P_n \text{ est une fonction polynomiale. Donner une relation entre } P_n', P_n \text{ et } P_{n+1} ?$$

c) Déterminer et démontrer (conjecture puis récurrence) le degré et le coefficient du terme de plus haut degré de P_n .

Ex 5 Soit $f : \left(\begin{array}{l} \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{1-x} e^{\frac{1}{1-x}} \end{array} \right)$.

a) Justifier que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

b) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, la dérivée $n^{\text{ième}}$ de f peut se mettre sous la forme :

$$f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{1-x}\right) e^{\frac{1}{1-x}}, \text{ où } P_n \text{ est une fonction polynomiale. Donner une relation entre } P_n^{(t)}, P_n(t) \text{ et } P_{n+1}(t).$$

c) Déterminer, par conjecture puis récurrence, le degré et le coefficient dominant de P_n .

d) Montrer que f est solution de : $(1-x)^2 y' = (2-x)y$.

e) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}^*, P_{n+1}(t) = [(2n+1)t + t^2]P_n(t) - n^2 t^2 P_{n-1}(t)$.

Ex 6 Soit $(E) : x^2 y'' + 4xy' + 2y = \sin(x)$ Soit g une solution de (E) sur \mathbb{R} de classe C^∞ .

1) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, x^2 g^{(n+2)}(x) + (2n+4)xg^{(n+1)}(x) + (n^2 + 3n + 2)g^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$.

2) En déduire le polynôme de Taylor de g en 0 de rang n tq $n \in \mathbb{N}$.

3) Résoudre (E) sur \mathbb{R}^{+*} en posant $\theta(x) = x^2 y(x)$. Faites de même sur \mathbb{R}^{-*} .

4) En déduire g et retrouver la valeur de $g'(0)$.

Ex 7 Trouver une relation entre $\text{Arctan}^{(n+2)}, \text{Arctan}^{(n+1)}$ et $\text{Arctan}^{(n)}$.

Ex 8 Soit $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$.

1. Calculer le plus efficacement possible $f^{(n)}(0)$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer $f^{(n)}(x)$ pour $|x| \neq 1$.

Ex 9

A) Montrer que la fonction : $f : \left(x \mapsto \begin{cases} 1 - \frac{x^2}{2} & \text{si } x < 0 \\ \frac{2+x^2}{2(1+x^2)} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \right)$ est de classe C^3 sur \mathbb{R} mais n'est pas de 4 fois dérivable sur \mathbb{R} .

B) Soit n un entier naturel non nul. Soit $f : \left(x \mapsto \begin{cases} x^n \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \right)$. Montrer que f est de classe C^{n-1} mais pas n -fois dérivable sur \mathbb{R}^+ et $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, f^{(k)}(0) = 0$. Que peut-on en conclure sur les ensembles $D^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $C^{n-1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

II Comparaison des fonctions et développements limités

VRAI ou FAUX

- $(x \mapsto \sin(\frac{1}{x}))$ admet un $DL_0(0)$.
- $(x \mapsto \sqrt{x+1})$ admet-elle un $DL_1(-1)$.
- La fonction $(x \mapsto \sqrt{x^5})$ admet un $DL_2(0)$.
- La fonction $(x \mapsto \sqrt{x^5})$ admet un $DL_3(0)$.
- $f \sim_a g$ et f et g dérivables au voisinage de $a \Rightarrow f' \sim_a g'$.
- $f(x) = o_a(x) \Rightarrow f(x)^2 = o_a(x^2)$
- $f(x) \sim_0 h(x) \Rightarrow xf(x) \sim_0 (x+1)h(x)$
- $\ln(\frac{x+1}{x}) \sim_{+\infty} \frac{1}{x}$
- $e^{x^2-4x+1} \sim_{+\infty} e^{x^2}$
- $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \sim_{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}}$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{2}{x})^{3x} = e^6$
- $\frac{e^{3x}}{e^{2x-1}} \sim_0 e^x$
- $\sin(\frac{1}{n+2}) \sim_{+\infty} \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$.
- Il existe un réel α strictement positif tq : $x \ln(x) = o_0(x^\alpha)$.
- Pour tout réel α positif, $e^{\frac{1}{x-1}} = o_1((1-x)^\alpha)$.
- Il existe un réel α strictement positif tq : $e^{\sqrt[3]{x}} = o_{+\infty}(\ln^\alpha(x))$.
- $x^2 \ln(x) \ll_0 \frac{x}{\ln(x)} \ll_0 x \ln(x) \ll_0 x \ll_0 1 \ll_0 \frac{\ln^3(x)}{x} \ll_0 \frac{\ln(x)}{x^3}$

Ex 10 EQUIVALENTS

1) Déterminer un équivalent simple au voisinage de 0 de $f(x)$. Que peut-on en déduire sur f ?

- $f(x) = \frac{x^4 - \tan^2(x) \sqrt[3]{5\sqrt{1-x}-1}}{\sin(\frac{1}{x}) - \ln(x)}$
- $f(x) = e^x - \sqrt{1+2x} - x^2$
- $f(x) = \frac{e^{2x} - \ln(e+x)}{x^3 + \sin(x)\cos(x)}$
- $f(x) = \ln(3e^x + e^{-x}) - 2\ln(2)$
- $f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{1+x}} - \sqrt{2}$
- $f(x) = \text{Arcsin}(\pi \sin(x))$
- $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}$
- $f(x) = \ln(2 - x^3 + e^x)$
- $f(x) = (1 - 2x^2)^{\frac{1}{x^3}}$
- $f(x) = \ln(\ln(e+x))$
- $f(x) = \ln(\sin x)$
- $f(x) = \frac{2}{\sin^2 x} - \frac{1}{1 - \cos(x)}$
- $f(x) = \sqrt[p]{1+px} - \sqrt[q]{1+qx} + (\frac{p-q}{2})x^2$
- $f(x) = \text{sh}(x)^{\frac{1}{\ln(x)}}$
- $f(x) = x^x - (\sin x)^{\sin x}$

2) Déterminer un équivalent simple pour x au voisinage de $+\infty$ de $f(x)$. Que peut-on en déduire sur f ?

- $f(x) = e^{2-x^2 + \frac{1}{x} \ln(x)}$
- $f(x) = \ln(2 - x^3 + e^x)$
- $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2+x+1}{x^2-2}}$
- $f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{1+x}}$
- $f(x) = \sqrt{x^2 + ax + b} - x$
- $f(x) = \tan x, a = \frac{\pi}{2}$
- $f(x) = (x^2 - 3x + 2) \ln(\sin \frac{\pi x}{2}), a = 1$
- $f(x) = \text{Arccos}(x), a = 1$
- $f(x) = x^x - 4, a = 2$
- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x - \sin x \times \ln x}}$
- $f(x) = \text{Arctan}(x) - \frac{\pi}{2}$
- $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sin(\frac{1}{x})} \ln(\frac{x}{x+1})$
- $f(x) = (\ln x)^2 (\sin(\frac{1}{\ln x}) - \sin(\frac{1}{\ln(x+1)}))$
- $f(x) = \text{Arctan}(x) - \frac{\pi}{4}, a = 1$
- $f(x) = x^x - x, a = 1$

Ex 11 TECHNIQUES DE CALCUL DES DL :

Déterminer le développement limité à l'ordre demandé au voisinage du point indiqué de chacune des fonctions f suivantes et en déduire dans les cas(**) une propriété sur f :

- $f(x) = \sqrt{4 + e^x}$ (ordre 3 en 0)
- $f(x) = \ln(1 + \sqrt[3]{8+x})$ (ordre 3 en 0)
- $f(x) = \frac{\sin(x)}{1-x^2+x^3}$ (ordre 6 en 0)
- $f(x) = e^{\text{Arccos}(x)}$ (ordre 6 en 0)
- $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x^2+x^3}$ (ordre 3 en 1)
- $f(x) = \frac{\sin(x) \text{Arctan}(x)}{\text{sh}(x)}$ (ordre 6 en 0). (**)
- $f(x) = \tan(x)$ (ordre 7 en 0)
- $f(x) = \tan(x)$ (ordre 3 en $\frac{\pi}{4}$)
- $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(\text{Arcsin}(x))^2}$ (ordre 5 en 0). (**)
- $f(x) = \tan(\sqrt[3]{4(\pi^3 + x^3)})$ (ordre 3 en π)
- $f(x) = \frac{\text{sh}(x)}{\ln(1+\sin(x))}$ (ordre 6 en 0). (**)
- $f(x) = x^2 \text{Arctan}(\frac{1}{x+1})$ (ordre 6 en $(-1)^+$ et en $(-1)^-$)
- $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ (ordre 3 en 0). (**)
- $f(x) = \ln(\frac{x^2+1}{x+3})$ (ordre 5 en 0)
- $f(x) = \cos(x)^{\frac{1}{\sin^2(x)}}$ (ordre 6 en 0)
- $f(x) = \text{Arctan}(\frac{1}{x^2})$ (ordre 13 en 0). (**)
- $f(x) = \exp(\cos(\ln(\cos(x))))$ (ordre 3 en 0)
- $f(x) = \text{Arctan}(\cos(x))$ (ordre 5 en 0)
- $f(x) = \text{Arccos} \sqrt{\frac{x}{\tan(x)}}$ (ordre 1 puis 3 en 0^+)

20. $f(x) = \sqrt{x(\sin x + \operatorname{sh} x - 2x)}$ (ordre 9 en 0^+ , en 0^-)

22. $f(x) = \ln\left(\sum_{k=0}^{99} \frac{x^k}{k!}\right)$ (ordre 100 en 0)

21. $f(x) = \operatorname{sh}^{-1}$. (ordre 5 en 0)

23. $f(x) = \operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\frac{x}{x+1}}\right)$ (ordre 2 en 1)

Ex 12 Opérations sur les développements limités

1) Soit $f(x) = x^2 + 2x^3 + x^4 + o_0(x^4)$ et $g(x) = -x^3 + 3x^4 + o_0(x^4)$. Trouver le plus grand ordre possible que l'on obtient pour le développement limité en 0 de $f \times g$ puis de $\frac{g}{f}$ et enfin de $f \circ g$.

2) Donner le développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 de la fonction polynomiale $P: (x \mapsto \sum_{k=0}^p a_k x^k)$ où $p = \operatorname{deg} P$.

Ex 13 Développement limité d'une fonction définie par une intégrale et d'une bijection réciproque

24. Soit $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} dt$. Déterminer son DL en 0 à l'ordre 10. Qu'en déduit-on sur f ?

25. Déterminer son DL en 0 à l'ordre 5 de φ^{-1} où $\varphi: (x \mapsto x e^{x^2})$

Ex 14 DEVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES

1. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que $f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right)$.

Trouver trois réels A, B et C tels que : $f(x) = A + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)$.

2. Soit $f(x) = \sqrt{\frac{3-x^2}{2-4x}}$. Montrer que $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{4\sqrt{x}} - \frac{21}{16x\sqrt{x}} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)$. Que peut-on en conclure sur Cf ?

3. Trouver un développement asymptotique de \tan au voisinage de $\frac{\pi^-}{2}$ à 3 termes significatifs.

4. Montrer que $\left(\frac{x+1}{x}\right)^{\ln(x)} = 1 + \frac{\ln(x)}{x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^2 + \frac{\ln(x)}{x^2} + \frac{(\ln(x))^3}{6x^3} + \frac{(\ln(x))^2}{x^3} + \frac{\ln(x)}{x^3} + o_{+\infty}\left(\frac{\ln(x)}{x^3}\right)$.

Ex 15

1. Montrer que : $\operatorname{Arctan}(x+1) - \operatorname{Arctan}(x) \sim_{+\infty} \frac{1}{x^2}$.

2. En déduire que : $\frac{\operatorname{Arctan}(x+1)}{\operatorname{Arctan}(x)} = 1 + \frac{2}{\pi x^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$

3. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\operatorname{Arctan}(x+1)}{\operatorname{Arctan}(x)}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

Ex 16 TANGENTES – DEMI-TANGENTES – PROLONGEMENT PAR CONTINUTE – EXTREMUM LOCAL – ASYMPTOTES

1. Soit $f: (x \mapsto (1 - 2\sin(x))\tan(3x))$. Montrer que f est prolongeable par continuité en $\frac{\pi}{6}$ et que son prolongement est dérivable en $\frac{\pi}{6}$ et étudier la position de sa courbe par rapport à sa tangente.

2. Déterminer l'équation des deux demi-tangentes de Cf où $f: (x \mapsto \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}})$ en 0 et la position de la courbe de f par rapport à ces demi-tangentes.

3. Montrer que f définie par et $g(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est de classe C^1 sur $] -1, 1[$ et admet un extremum local en 0.

4. Déterminer une équation de l'asymptote oblique de la courbe représentative de f et la position de la courbe par rapport à cette asymptote dans les cas suivants :

a. $f(x) = x \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ c. $f(x) = (x+1)\operatorname{Arctan}\left(\frac{2+x}{x}\right)$

b. $f(x) = \frac{1-x+4x^2}{2x-3} e^{\frac{1}{x-3}}$ d. $f(x) = (x^2 - 1) \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

Ex 17 Fonction avec paramètre

Soit a un réel et $f_a: (x \mapsto \frac{1-ax+x^2}{\sqrt{1+x^2}} e^{\operatorname{Arctan}(x)})$.

1. a. Déterminer un équivalent simple de f_a au voisinage de 0.
 - b. Donner l'équation de la tangente à C_{f_a} en 0 et la position, au voisinage de 0, de la courbe C_{f_a} par rapport à cette tangente (suivant les valeurs de a).
2. a. Déterminer un équivalent simple de f_a au voisinage de $+\infty$.
 - b. Montrer que C_{f_a} a deux asymptotes obliques et étudier la position, au voisinage de $\pm\infty$, de C_{f_a} par rapport à ses asymptotes (suivant les valeurs de a).
 - c. Vérifier que ces deux asymptotes se coupent orthogonalement sur (Ox) .

Ex 18 Etude de fonctions

1. Etude complète et tracé de la fonction $f(x) = \sqrt[3]{x^2(x-2)}$.
2. Etude complète et tracé de la fonction $f(x) = e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x^2+x}$
3. Soit $0 < a < b$. Etude complète de la fonction $f(x) = \left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$.

Ex 19 Raccord dans une équation différentielle

1. a) Trouver trois réels a, b et c tels que : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}, \frac{1}{x^2(1+x)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x+1}$.
b) Résoudre $x^2(1+x)y' + y = x$ sur \mathbb{R} .
2. Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle $|x|y' + (x-1)y = x^3$.

Ex 20 LIMITES. Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos(x) e^{\frac{1}{1-\sin(x)}}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\text{Arctan}(x) - \frac{\pi}{2})$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x^\alpha)^{\frac{1}{x^{\alpha+\beta}}}$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - x}{1-x+\ln(x)}$

e) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{2}{\cos^2 x} + \frac{1}{\ln(\sin(x))} \right)$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{\ln(x)}{x}} - x}{x^2 \ln(x)}$

g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^n x - x^n}{x^{n+2}}$

h) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e}{e^x - e} - \frac{1}{x-1}$

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x - ex^3 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}$

k) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)} \right)^{x \ln(x)}$

l) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2^x + 3^x}{2^{x+1} + 5^x} \right)^{\frac{1}{2-x}}$

m) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$

n) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^n x - n \cos(x) + n - 1}{\sin^4 x}$

o) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\text{Arctan}(2 \sin x) - \frac{\pi}{4}}{\cos(3x)}$

p) $\lim_{x \rightarrow 2} (2^x + 3^x - 12)^{\tan \frac{\pi x}{4}}$

q) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - x^a}{x^x - a^a}$ où $a \in \mathbb{R}^{+*}$

