Corrigé DL Algèbre linéaire 2

Exercice : Dans $\mathbb{R}_n[X]$, on pose $P_0 = 1$ et $\forall k \in [\![1,n]\!], P_k = \frac{1}{k!}X(X-k)^{k-1}$.

- **a. Montrer que $(P_k)_{k=0...n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.**
- **b. Montrer que $\forall j \in [\![0,n]\!], \forall k \in [\![0,j]\!], P_j^{(k)}(X) = P_{j-k}(X-k)$.**
- **c. En déduire que $P_j^{(k)}(k) = 0$ pour tous j et k distincts dans $[\![0,n]\!]$.**
- **d. Déterminer les composantes d'un polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ dans cette base.**

a. Tous les polynômes P_k sont à coefficients réels.

De plus, $deg(P_0) = 0 \le n$ et $\forall k \in [\![1,n]\!], deg(P_k) = deg(\frac{1}{k!}X) + deg((X-k)^{k-1}) = 1 + (k-1) = k \le n$. Donc tous les polynômes P_k sont éléments de $\mathbb{R}_n[X]$. De plus, cette famille $B = (P_k)_{k=0;;n}$ est échelonnée en degré sans polynôme nul donc est libre dans $\mathbb{R}_n[X]$. Enfin , $\mathrm{card}(B) = (n+1) = dim\mathbb{R}_n[X]$. J'en conclus que B est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

b. $P_0^{(0)}(X) = P_0(X) = P_0(X-0)$.

Soit $j \in [\![1,n]\!]$. $P_j = \frac{1}{j!}X(X-j)^{j-1}$.

Donc, $P_j' = \frac{1}{j!}[(X-j)^{j-1} + (j-1)(X-j)^{j-2}] = \frac{(X-j)^{j-2}}{j!}[(X-j)^1 + (j-1)] = \frac{(X-j)^{j-2}}{j!}[X-1] = \frac{(X-1-(j-1))^{(j-1)-1}}{j!}[X-1]$

Ainsi, $P_j'(X) = P_{j-1}(X-1)$ $(**)$.

Montrons par récurrence finie sur k que : $\forall k \in [\![0,j]\!], [P_j^{(k)}(X) = P_{j-k}(X-k)]_{=H(k)}$.

Initialisation : $H(0)$est évidemment vraie et $H(1)$ est vraie d' après ce qui précède.

Propagation : Soit k un entier naturel strictement inférieur à j. Supposons que $P_j^{(k)}(X) = P_{j-k}(X-k)$.

Alors $P_j^{(k+1)}(X) = P_{j-k}'(X-k) \underbrace{=}_{d'après\ (**)} P_{j-k-1}(X-k-1) = P_{j-(k+1)}(X-(k+1))$. Donc $H(k+1)$ est vraie dès que $H(k)$ est vraie.

Conclusion $\forall k \in [\![1,j]\!], P_j^{(k)}(X) = P_{j-k}(X-k)$. Et finalement, $\forall k \in [\![0,j]\!], P_j^{(k)}(X) = P_{j-k}(X-k)$.

c. Si $k < j$, $P_j^{(k)}(k) = P_{j-k}(0) \underbrace{=}_{\substack{car\ j-k>0 \\ donc\ P_{j-k}\ admet \\ 0\ comme\ racine.}} 0$. Et si $k > j$, $P_j^{(k)} = 0$ $\left(puisque\ degP_j = j < k \right)$ donc $P_j^{(k)}(k) = 0$.

d. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Comme B est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, P s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des P_j. Iil existe donc des uniques réels $a_0, a_1, \dots, a_n$ tels que $P = a_0P_0 + a_1P_1 + \cdots + a_nP_n = \sum_{j=0}^{n} a_jP_j$.

Alors $\forall k \in [\![0,n]\!], P^{(k)} = \sum_{j=0}^{n} a_jP_j^{(k)}$ et $P^{(k)}(k) = \sum_{j=0}^{n} a_jP_j^{(k)}(k) = a_kP_k^{(k)}(k) = a_k$. Donc $a_k = P^{(k)}(k)$.

Ainsi, $P = \sum_{j=0}^{n} P^{(j)}(j)P_j$.

PROBLEME

A toute fonction $f \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on associe la fonction $T(f)$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $T(f)(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt & si\ x \ne 0 \\ f(0) & si\ x = 0 \end{cases}$.

Partie I : Exemples. Déterminer $T(f)$ dans les cas suivants

1. $f(t) = t^2\cos(t^3 - 1)$
2. $f(t) = \cos(2t)\,sin^3(t)$
3. $f(t) = t^2e^{-t}$
4. $f(t) = \frac{t^3-1}{t^2+t+2}$

1. f est bien continue sur $\mathbb{R}$. Donc $T(f)$ est bien définie. Et pour tout réel x non nul,

$$\int_0^x t^2\cos(t^3-1)\,dt = \frac{1}{3}\int_0^x 3t^2\cos(t^3-1)\,dt = \frac{1}{3}[\sin(x^3-1) + \sin(1)].$$

Donc, $T(f)(x) = \begin{cases} \frac{[\sin(x^3-1)+\sin(1)]}{3x} & si\ x \ne 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$.

2. f est bien continue sur $\mathbb{R}$. Donc $T(f)$ est bien définie. De plus,

$$\cos(2t)\,sin^3(t) = \left(\frac{e^{2it}+e^{-2it}}{2}\right)\left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)^3 = \left(\frac{e^{2it}+e^{-2it}}{2}\right)\left(\frac{e^{i3t}-3e^{it}+3e^{-it}-e^{-i3t}}{-8i}\right)$$

$$= -\frac{1}{16i}(e^{i5t} - 3e^{3it} + 3e^{it} - e^{-it} + e^{it} - 3e^{-it} + 3e^{-3it} - e^{-5it}) = -\frac{1}{8}(\sin(5t) - 3\sin(3t) + 4\sin(t)).$$

Donc, $T(f)(x) = \begin{cases} \dfrac{\frac{1}{40}\cos(5x)-\frac{1}{8}\cos(3x)+\frac{1}{2}\cos(x)-\frac{2}{5}}{x} \ si\ x \neq 0 \\ 0\ si\ x = 0 \end{cases}$.

3. f est bien continue sur $\mathbb{R}$. Donc $T(f)$ est bien définie. Et pour tout réel x non nul, $\int_0^x t^2e^{-t}dt = [-t^2e^{-t}]_0^x + \int_0^x 2te^{-t}dt = -x^2e^{-x} + 2[-te^{-t}]_0^x + \int_0^x 2e^{-t}dt = -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + 2$.

Donc, $T(f)(x) = \begin{cases} -xe^{-x} - 2e^{-x} - \frac{2(e^{-x}-1)}{x} \ si\ x \neq 0 \\ 0 \quad si\ x = 0 \end{cases}$.

4. f est bien continue sur $\mathbb{R}$ (puisque le dénominateur de discriminant strictement négatif ne s'annule jamais). Donc $T(f)$ est bien définie.

$\forall t,\ \frac{t^3-1}{t^2+t+2} \overset{\substack{division\ euclidienne \\ de\ t^3-1\ par\ t^2++2}}{\triangleq} \frac{(t-1)(t^2+t+2)-t+1}{t^2+t+2} = (t-1) - \frac{t-1}{t^2+t+2} = (t-1) - \frac{1}{2}\frac{2t+1}{t^2+t+2} + \frac{3}{2}\frac{1}{t^2+t+2}$.

$\int_0^x \frac{t^3-1}{t^2+t+2}dt = \int_0^x (t-1) - \frac{1}{2}\frac{2t+1}{t^2+t+2}dt + \frac{3}{2}\int_0^x \frac{1}{t^2+t+2}dt = \left[\frac{t^2}{2} - t - \frac{1}{2}\ln(t^2+t+2)\right]_0^x + \frac{3}{2}\int_0^x \frac{1}{\frac{7}{4}[\left(\frac{2t+1}{\sqrt{7}}\right)^2+1]}dt$

$\overset{\substack{CV \\ u=\frac{2t+1}{\sqrt{7}}}}{\triangleq} \frac{x^2}{2} - x - \frac{1}{2}\ln(x^2+x+2) + \frac{1}{2}\ln(2) + \frac{3}{\sqrt{7}}\int_{\frac{1}{\sqrt{7}}}^{\frac{2x+1}{\sqrt{7}}} \frac{1}{u^2+1}dt$

$= \frac{x^2}{2} - x - \frac{1}{2}\ln(x^2+x+2) + \frac{1}{2}\ln(2) + \frac{3}{\sqrt{7}}Arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{7}}\right) - \frac{3}{\sqrt{7}}Arctan\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)$.

Donc, $T(f)(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} - 1 + \dfrac{\frac{1}{2}\ln(2)-\frac{1}{2}\ln(x^2+x+2)+\frac{3}{\sqrt{7}}Arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{7}}\right)\pm\frac{3}{\sqrt{7}}Arctan\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)}{x} si\ x \neq 0 \\ -\frac{1}{2} \quad si\ x = 0\ . \end{cases}$.

Partie II : Etude de T sur E_n. Soit n un entier naturel. On note E_n , l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n .

1. Donner une base et la dimension de E_n .
2. Montrer que E_n est stable par T. On note T_n l'endomorphisme de E_n induit par T.
3. Montrer que T_n est un automorphisme de E_n.
4. Déterminer tous les réels tels que l'équation $T_n(P) = \lambda P$, d'inconnue $P \in E_n$, admet une solution non nulle.
5. Pour chacune des valeurs de λ trouvées précédemment, donner une base de $Ker(T_n - \lambda Id)$.

1. Les fonctions $f_0: (x \mapsto 1), f_1: (x \mapsto x), f_2: (x \mapsto x^2), \dots, f_n: (x \mapsto x^n)$ forment une famille libre car échelonnée en degré et sans fonctions nulles et génératrice de E_n, par défintino des fonctions polynomiales de degré inférieur à n. Donc la famille $B = (f_k)_{k=0\dots n}$ est une base de E_n. Alors, $dimE_n = n+1$.

2. Tout d'abord, T est linéaire car : $\forall(f,g) \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}), \forall(a,b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\forall x \neq 0, T(af+bg)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x af(t)+bg(t)dt = \frac{1}{x}\left[a\int_0^x f(t)dt + b\int_0^x g(t)dt\right] = \frac{a}{x}\int_0^x f(t)dt + \frac{b}{x}\int_0^x g(t)dt$$
$$= aT(f)(x) + bT(f)(x).$$

Et , $T(af+bg)(0) = af(0) + bg(0) = aT(f)(0) + bT(g)(0)$. J'en conclus que $T(af+bg) = aT(f) + bT(g)$.

Ensuite, fixons $k \in [\![0,n]\!]$. $\forall x \neq 0, T(f_k)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x t^k dt = \frac{1}{x}\left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_0^x = \frac{x^k}{k+1}\ et\ T(f_k)(0) = 0$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}, , T(f_k)(x) = \frac{x^k}{k+1} = \frac{1}{k+1}f_k(x)$.Je peux ainsi, conclure que , $T(f_k) = \frac{1}{k+1}f_k \in E_n$.

Enfin, $Soit\ \varphi \in E_n$. Alors il existe des uniques réels $a_0, \dots, a_n$tels que $\varphi = \sum_{k=0}^n a_k f_k$.

Donc, $T(\varphi) = T(\sum_{k=0}^n a_k f_k) \underset{\substack{car \\ T\ est\ liénarei}}{\underbrace{=}} \sum_{k=0}^n a_k T(f_k) = \sum_{k=0}^n a_k \frac{1}{k+1} f_k$. $T(\varphi)$est donc une combinaison linéaire des fonctions de B. Nous pouvons donc affirmer que $T(\varphi) \in E_n$. Ainsi, $E_n$est stable par T.

Donc $T_n: \begin{pmatrix} E_n \to E_n \\ f \mapsto T(f) \end{pmatrix}$ est un endomorphisme de E_n.

3. Comme $E_n$est de dimension finie $n+1$, $T_n$est un automorphisme de E_n sietssi $T_n$est surjective sietssi $Im(T_n) = E_n$. Or, $Im(T_n) = vect(T(f_0), T(f_1), \dots, T(f_n)) = vect(f_0, \frac{1}{2}f_1, \frac{1}{3}f_2, \dots, \frac{1}{n+1}f_n) = vect(f_0, f_1, f_2, \dots, f_n) = E_n$. J'en conclus que $T_n$est un automorphisme de E_n.

4. Soit $\lambda\ un\ réel.$

l'équation $T_n(P) = \lambda P$, d'inconnue $P \in E_n$, admet une solution non nulle

$\Leftrightarrow$l'équation $(T_n - \lambda Id)(P) = 0$, d'inconnue $P \in E_n$, admet une solution non nulle

$\Leftrightarrow Ker(T_n - \lambda Id)$ contient une fonction non nulle

$\Leftrightarrow T_n - \lambda Id$ n'est pas injective

$\Leftrightarrow ((T_n - \lambda Id)(f_k))_{k=0..n}$ est liée.

Or, $(T_n - \lambda Id)(f_k) = T_n(f_k) - \lambda(f_k) = \frac{1}{k+1}f_k - \lambda f_k = (\frac{1}{k+1} - \lambda)f_k$.

Si $\lambda \in \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n+1}\right\}$ alors la famille $((T_n - \lambda Id)(f_k))_{k=0..n}$ contient la fonction nulle donc est liée.

Si $\lambda \notin \left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\dots,\frac{1}{n+1}\right\}$ alors la famille $((T_n-\lambda Id)(f_k))_{k=0..n}$ ne contient pas la fonction nulle et est échelonnée en degré donc est libre.

J'en conclus que l'équation $T_n\,(P)=\lambda P$, d'inconnue $P\in E_n$, admet une solution non nulle$\Leftrightarrow \lambda\in\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\dots,\frac{1}{n+1}\right\}$.

5. Soit $\lambda\in\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\dots,\frac{1}{n+1}\right\}.\, i.e.\, \exists k_0\in[\![0,n]\!]/\ \lambda=\frac{1}{k_0+1}$.

Alors, $T_n\left(f_{k_0}\right)=\frac{1}{k_0+1}f_{k_0}$ $i.e$ $f_{k_0}\in Ker(T_n-\lambda Id)$. Et par suite $vect(f_{k_0})\subset Ker(T_n-\lambda Id)$ (car $Ker(T_n-\lambda Id)$ est un ss-e-vde E_n).

Quels sont les autres vecteurs de $Ker(T_n-\lambda Id)$?

Soit $\varphi\in E_n$ tel que $\varphi=\sum_{k=0}^{n}a_kf_k$. Donc, $T(\varphi)=\sum_{k=0}^{n}a_k\frac{1}{k+1}f_k$.

Alors, $\varphi\in Ker(T_n-\lambda Id)\Leftrightarrow T(\varphi)=\lambda\varphi\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n}a_k\frac{1}{k+1}f_k=\lambda\sum_{k=0}^{n}a_kf_k\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n}a_k(\frac{1}{k+1}-\lambda)f_k=0$

$\Leftrightarrow \forall k\in[\![0,n]\!], a_k\left(\underbrace{\frac{1}{k+1}-\lambda}_{\neq 0\ si\ k\neq k_0}\right)=0\Leftrightarrow \forall k\in[\![0,n]\!]\backslash\{k_0\}, a_k=0\Leftrightarrow \varphi=a_{k_0}f_{k_0}\Leftrightarrow \varphi\in vect\left(f_{k_0}\right)$.

Ains, $vect\left(f_{k_0}\right)=Ker(T_n-\lambda Id)=Ker\left(T_n-\frac{1}{k_0+1}Id\right)$

Partie III : Etude de T dans $C°(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Soit $f\in C°(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

1. Montrer que $T(\,f\,)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et est solution sur $\mathbb{R}^*$ de l'équation différentielle : $xy'+y=f(x)$ d'inconnue y.
2. Etudier la continuité de $T(\,f\,)$ en 0.
3. Montrer que T définit un endomorphisme sur $C°(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
4. Justifier que T est injective mais n'est pas surjective.
5. Déterminer $Ker\left(T-\frac{1}{2}Id\right)$.

1. Soit $f\in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Alors, le théorème fondamental de l'intégration assure que $F:\left(x\mapsto\int_0^x f(t)dt\right)$ est la primitive de f qui s'annule en 0. Donc F est de classe C^1sur $\mathbb{R}$. Alors $\left(x\mapsto\frac{F(x)}{x}\right)$ est de classe C^1sur $\mathbb{R}^*$. Donc $T(f)$ est de classe C^1sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x\neq 0, T(f)'(x)=\frac{F'(x)}{x}-\frac{F(x)}{x^2}=\frac{f(x)}{x}-\frac{T(f)(x)}{x}$ donc $xT(f)'(x)+T(f)(x)=f(x)$. Ainsi, $T(f)$ est solution sur $\mathbb{R}^*$ de l'équation différentielle : $xy'+y=f(x)$.
2. $\forall x\neq 0, T(f)(x)=\frac{F(x)}{x}=\underbrace{\frac{F(x)-F(0)}{x-0}\xrightarrow[x\to 0]{}F'(0)}_{\text{car } F \text{ est dérivable en } 0}=f(0)=T(f)(0)$. Donc $T(f)$ est continue en 0.
3. T est linéaire d'après la partie précédente et $\forall f\in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $T(f)$ est dérivable donc continue sur $\mathbb{R}^*$et $T(f)$ est continue en 0 donc $T(f)$ est continue sur $\mathbb{R}$. Ainsi, T définit un endomorphisme sur $C°(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
4. La fonction $(x\mapsto|x-1|)$ est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ mais n'est pas dérivable en 1. Or, toute image par T est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ donc en 1. Par conséquent, la fonction $(x\mapsto|x-1|)$ n'est pas une image par T i.e. n'a pas d'antécédent par T. Donc, T n'est pas surjective de $C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ sur $C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

   T étant linéaire, étudions son noyau pour étudier son injectivité :

   Soit $f\in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$. D'après 1., $\forall x\neq 0, xT(f)'(x)+T(f)(x)=f(x)$.

   Donc, $T(f)=0\implies \forall x\neq 0, x\times 0+0=f(x)\implies \forall x\neq 0, f(x)=0\ \underset{\underbrace{}_{car\ f\ est\ continue\ en\ 0}}{\implies}\ \forall x\in\mathbb{R}, f(x)=0$. Donc, $Ker(f)=\{0\}$.
5. $Ker\left(T-\frac{1}{2}Id\right)=\{f\in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})/\ T(f)=\frac{1}{2}f\}$=$\{f\in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})/\ \forall x\neq 0, \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=\frac{1}{2}f(x)\ et\ f(0)=\frac{1}{2}f(0)\}$

   $Ker\left(T-\frac{1}{2}Id\right)$=$\{f\in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})/\ \forall x\neq 0, \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=\frac{1}{2}f(x)\ et\ f(0)=0)\}$.

   Soit $f\in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tel que $f(0)=0\ et\ F$ sa primitive qui s'annule en 0.

   $\forall x\neq 0, \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=\frac{1}{2}f(x)\Leftrightarrow \forall x\neq 0, \frac{1}{x}F(x)=\frac{1}{2}F'(x)$

   $\Leftrightarrow \forall x\neq 0, F'(x)-\frac{2}{x}F(x)=0$

   $\Leftrightarrow \exists(k_1,k_2)\in\mathbb{R}^2/\forall x>0, F(x)=k_1x^2 et\ \ \forall x<0, F(x)=k_2x^2(\ et\ F(0)=0)\leftarrow$ *une telle F est dérivable sur $\mathbb{R}$*

   $\Leftrightarrow \exists(k_1,k_2)\in\mathbb{R}^2/\forall x>0, f(x)=2k_1x\ et\ \ \forall x<0, f(x)=2k_2x\ (et\ f(0)=0)\leftarrow$ *une telle f est continue sur $\mathbb{R}$*

   $\Leftrightarrow \exists(a_1,a_2)\in\mathbb{R}^2/\forall x>0, f(x)=a_1x\ et\ \ \forall x<0, f(x)=a_2x\ \ (et\ f(0)=0)$

   $F:\left(x\mapsto\begin{cases}k_1x^2 si\ x\geq 0\\ k_2x^2 si\ x>0\end{cases}\right)$ est la seule primitive de $f:\left(x\mapsto\begin{cases}2k_1x\ \ si\ x\geq 0\\ 2k_2x\ si\ x>0\end{cases}\right)$ qui s'annule en 0.

Soit $u:\left(\begin{array}{c}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\begin{cases}x\ si\ x\geq 0\\ 0\ si\ x<0\end{cases}\end{array}\right)$ $et\ \ v:\left(\begin{array}{c}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\begin{cases}0\ si\ x\geq 0\\ x\ si\ x<0\end{cases}\end{array}\right)$. Alors u et v sont dans $C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $Ker\left(T-\frac{1}{2}Id\right)$=$vect(u,v)$.

De plus (u,v) est libre car $au+bv=0\implies \forall x, au(x)+bv(x)=0\implies \begin{cases}\ a=0\ (pour\ x=1)\\ b=0\ (\ pour\ x=-1)\end{cases}$.

Donc (u,v) est une base de $Ker\left(T-\frac{1}{2}Id\right)$.