DL algèbre linéaire 2

Exercice

Soit n un entier naturel non nul.

Dans $\mathbb{R}[X]$, on pose $P_0 = 1 \; et \; \forall k \in [\![1,n]\!], P_k = \frac{1}{k!}X(X-k)^{k-1}$.

1. Montrer que $B = (P_k)_{k=0\dots n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Montrer que $\forall j \in [\![0,n]\!], \forall k \in [\![0,j]\!], P_j^{(k)}(X) = P_{j-k}(X-k)$.

3. En déduire que $P_j^{(k)}(k) = 0$ pour tous j et k distincts dans $[\![0,n]\!]$.

4. Déterminer les composantes d'un polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ dans cette base B.

PROBLEME

A toute fonction $f \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on associe la fonction $T(f)$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $T(f)(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt \;\; si \; x \neq 0 \\ f(0) si \; x = 0 \end{cases}$.

Partie I : Exemples. Déterminer $T(f)$ dans les cas suivants

1. $f(t) = t^2\cos(t^3-1)$
2. $f(t) = \cos(2t)\, sin^3(t)$
3. $f(t) = t^2e^{-t}$
4. $f(t) = \frac{t^3-1}{t^2+t+2}$

Partie II : Etude de T sur E_n. Soit n un entier naturel. On note E_n , l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n .

1. Donner une base et la dimension de E_n .
2. Montrer que E_n est stable par T. On note T_n l'endomorphisme de E_n induit par T.
3. Montrer que T_n est un automorphisme de E_n.
4. Déterminer tous les réels λ tels que l'équation $T_n(P) = \lambda P$, d'inconnue $P \in E_n$, admet une solution non nulle.
5. Pour chacune des valeurs de λ trouvées précédemment, donner une base de $Ker(T_n - \lambda Id)$.

Partie III : Etude de T dans $C^\circ(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Soit $f \in C^\circ(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

1. Montrer que $T(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et est solution sur $\mathbb{R}^*$ de l'équation différentielle : $xy' + y = f(x)$ d'inconnue y.
2. Etudier la continuité de $T(f)$ en 0.
3. Montrer que T définit un endomorphisme sur $C^\circ(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
4. Justifier que T est injective mais n'est pas surjective.
5. Déterminer $Ker\left(T - \frac{1}{2}Id\right)$.