

Corrigé DL 1 Algèbre linéaire

Exercice 1

1. Montrer que $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ définie par : $f((x, y, z, t)) = (x - y + t, z - 2x, z + 2y - t, t + y)$ est bijective et donner une expression de f^{-1} .

2. Dédurre du calcul précédent l'inversibilité et l'inverse de la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$?

1. f est bijective de \mathbb{R}^4 sur \mathbb{R}^4 **si et seulement si** tout élément de \mathbb{R}^4 a un unique antécédent par f (dans \mathbb{R}^4).

Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Cherchons tous les antécédents de (a, b, c, d) par f i.e. tous les $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ tels que :

$$f((x, y, z, t)) = (a, b, c, d)$$

$$f((x, y, z, t)) = (a, b, c, d) \Leftrightarrow (x - y + t, z - 2x, z + 2y - t, t + y) = (a, b, c, d) \Leftrightarrow (S): \begin{cases} x - y + t = a \\ z - 2x = b \\ z + 2y - t = c \\ t + y = d \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + t = a \\ z = b + 2x \\ z + 2y - t = c \\ t = d - y \end{cases} \xrightarrow{\text{substitution}} \begin{cases} x - y + d - y = a \\ z = b + 2x \\ b + 2x + 2y - d + y = c \\ t = d - y \end{cases} \xrightarrow{\text{échange des lignes}} \begin{cases} x - 2y + d = a \\ 2x + 3y = c + d - b \\ z = b + 2x \\ t = d - y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x - 2y = a - d \\ 2x + 3y = c + d - b \\ z = b + 2x \\ t = d - y \end{cases} \xrightarrow{\substack{L_1 \leftarrow 2L_1 - L_2 \\ L_2 \leftarrow 3L_1 + 2L_2}} \begin{cases} -7y = 2a - 2d - c - d + b = 2a + b - c - 3d \\ 7x = 2c + 2d - 2b + 3a - 3d = 3a - 2b + 2c - d \\ z = b + 2x \\ t = d - y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{7}[2a + b - c - 3d] \\ x = \frac{1}{7}[3a - 2b + 2c - d] \\ z = b + \frac{2}{7}[3a - 2b + 2c - d] = \frac{1}{7}[6a + 3b + 4c - 2d] \\ t = d + \frac{1}{7}[2a + b - c - 3d] = \frac{1}{7}[2a + b - c + 4d] \end{cases}$$

Donc il existe un unique quadruplet (x, y, z, t) qui vérifie $f((x, y, z, t)) = (a, b, c, d)$; cet unique antécédent de

(a, b, c, d) est $(\frac{1}{7}[3a - 2b + 2c - d], -\frac{1}{7}[2a + b - c - 3d], \frac{1}{7}[6a + 3b + 4c - 2d], \frac{1}{7}[2a + b - c + 4d])$.

J'en déduis que f est bijective de \mathbb{R}^4 sur \mathbb{R}^4 et pour tout (a, b, c, d) dans \mathbb{R}^4 ,

$$f^{-1}((a, b, c, d)) = \text{de } \left(\frac{1}{7}[3a - 2b + 2c - d], -\frac{1}{7}[2a + b - c - 3d], \frac{1}{7}[6a + 3b + 4c - 2d], \frac{1}{7}[2a + b - c + 4d] \right)$$

2. On remarque que, en posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$, $(S) \Leftrightarrow M^T X = Y$. Autrement dit, (S) est associé à

M^T . Comme (S) admet un unique solution, (S) est de Cramer et par conséquent M^T est inversible. De plus,

$$(S) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \Leftrightarrow X = (M^T)^{-1} Y. \text{ Donc, } (M^T)^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Le cours assure alors que $M = (M^T)^T$ est aussi inversible (puisque la transposée d'une matrice inversible est inversible)

$$\text{et } M^{-1} = ((M^T)^{-1})^T = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 & 2 \\ -2 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

A. On appelle matrice magique toute matrice carrée telle que la somme des coefficients de chaque ligne soit la même quelle que soit la ligne et la somme des coefficients de chaque colonne soit la même quelle que soit la colonne. Soit E l'ensemble des matrices carrées d'ordre n , réelles et magiques où $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que si $A \in E$ alors la somme des coefficients de n'importe quelle ligne de A est égale à la somme des coefficients de n'importe quelle colonne de A .

Soit $A \in E$. On note l la somme des coefficients de chaque ligne de A et c la somme des coefficients de chaque colonne de A . On note s la somme de tous les coefficients de A .

Montrons que $l = c$.

$$\text{D'une part, } s = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} = \sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^n a_{ij}) = \sum_{i=1}^n l = nl$$

D'autre part, $s = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij} = \sum_{j=1}^n (\sum_{i=1}^n a_{ij}) = \sum_{i=1}^n c = nc$. Il s'en suit que $nl = nc$ et donc $l = c$ (puisque n est non nul).

Soit $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que : $A \in E \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / AU = \lambda U$ et $U^T A = \lambda U^T$.

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.

$\exists \lambda \in \mathbb{R} / AU = \lambda U$ et $U^T A = \lambda U^T \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n a_{ij} = \lambda$ et $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{i=1}^n a_{ij} = \lambda$

\Leftrightarrow la somme des coefficients de chaque ligne ou de chaque colonne de A est la même quelle que soit la ligne ou la colonne

d'après 1.

$$\Leftrightarrow A \in E$$

Montrer que si A et B sont carrées d'ordre n et magiques alors AB est magique.

Soit $A, B \in M_n(K)$ magiques. Alors AB est carrée d'ordre n . De plus,

$\exists \lambda \in \mathbb{R} / AU = \lambda U$ et $U^T A = \lambda U^T$ et $\exists \beta \in \mathbb{R} / BU = \beta U$ et $U^T B = \beta U^T$

Donc $ABU = A(BU) = A(\beta U) = \beta(AU) = \beta \lambda U$ et $U^T AB = (U^T A)B = (\lambda U^T)B = \lambda(U^T B) = \lambda(\beta U^T) = \beta \lambda U^T$.

J'en déduis que AB est magique aussi

Montrer que si A est magique et inversible alors son inverse est magique.

Soit $A \in E$, inversible. Alors $\exists \lambda \in \mathbb{R} / AU = \lambda U$ et $U^T A = \lambda U^T$. Donc, $U = (A^{-1}A)U = A^{-1}(AU) = A^{-1}(\lambda U) = \lambda A^{-1}U$ et de même, $U^T = U^T A A^{-1} = \lambda U^T A^{-1}$. De plus, le système $AX = 0_{n,1}$ admet $X = 0_{n,1}$ comme unique solution puisque A est

inversible. Donc, $AU \neq 0_{n,1}$ et ainsi $\lambda \neq 0$. Par conséquent, $A^{-1}U = \frac{1}{\lambda}U$ et $U^T A^{-1} = \frac{1}{\lambda}U^T$. J'en conclus que A^{-1} est

magique aussi.

Montrer que E est un ss-e-v de $M_n(\mathbb{R})$. Que peut-on dire de E au regard des résultats démontrés aux questions 3 et 4 ?

$E \subset M_n(\mathbb{R})$.

$O_n U = 0_{n,1}$ et $U^T O_n = 0_{1,n}$. Donc $O_n \in E$.

Soit $A, B \in E$ et $a, b \in \mathbb{R}$. Alors, $\exists \alpha \in \mathbb{R} / AU = \alpha U$ et $U^T A = \alpha U^T$ et $\exists \beta \in \mathbb{R} / BU = \beta U$ et $U^T B = \beta U^T$.

Alors, $(aA + bB)U = aAU + bBU = a\alpha U + b\beta U = (a\alpha + b\beta)U$

et $U^T(aA + bB) = aU^T A + bU^T B = a\alpha U^T + b\beta U^T = (a\alpha + b\beta)U^T$

J'en déduis que $aA + bB \in E$. J'en conclus que E est un ss-e-v de $M_n(\mathbb{R})$.

D'après 3 et 4, E est stable par produit et par passage à l'inverse.

Désormais $n = 3$.

Déterminer une famille génératrice de E . Quelle est la dimension de E ?

D'après la partie A, $E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & \lambda - a - b \\ c & d & \lambda - c - d \\ \lambda - a - c & \lambda - b - d & a + b + c + d - \lambda \end{pmatrix} / (a, b, c, d, \lambda) \in \mathbb{R}^5 \right\}$. Donc,

$$E = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} / (a, b, c, d, \lambda) \in \mathbb{R}^5 \right\}$$

Donc $E = \text{vect}(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5)$. La famille $(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5)$ est génératrice de E .

Montrons la liberté à la famille $(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5)$.

Soit $(a, b, c, d, \lambda) \in \mathbb{R}^5 / aA_1 + bA_2 + cA_3 + dA_4 + \lambda A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Alors $\begin{pmatrix} a & b & \lambda - a - b \\ c & d & \lambda - c - d \\ \lambda - a - c & \lambda - b - d & -\lambda + a + b + c + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Donc $a = b = c = d = 0$ et $\lambda - a - b = 0$. Donc $a = b = c = d = \lambda = 0$. Ainsi, $(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5)$ est libre et finalement est une base de E . J'en conclus que $\dim(E) = 5$.

Soit $D = \text{diag}(1, 2, 3)$ et F l'ensemble des matrices réelles qui commutent avec D .

Montrer que F est un ss-e-v de $M_3(\mathbb{R})$, en donner une famille génératrice et sa dimension.

$F = \{M \in M_3(\mathbb{R}) / DM = MD\} \subset M_3(\mathbb{R})$.

$DO_3 = O_3 = O_3D$. Donc, $O_3 \in F$

Soit $(P, Q) \in F^2$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Alors $D(aP + bQ) = D(aP) + D(bQ) = aDP + bDQ = aPD + bQD = (aP + bQ)D$. Donc, $aP + bQ \in F$.

Ainsi F est un ss-e-v de $M_3(\mathbb{R})$.

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) / \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) / \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \\ 3g & 3h & 3k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2b & 3c \\ d & 2e & 3f \\ g & 2h & 3k \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) / \begin{cases} b = 2b \\ c = 3c \\ 2d = d \\ 2f = 3f \\ 3g = g \\ 3h = 2h \end{cases} \right\}$$

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} / a, e, k \text{ réels} \right\} = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} / a, e, k \text{ réels} \right\}$$

Donc, $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de F . De plus cette famille est libre puisque

$$a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a = e = k = 0.$$

Donc \mathcal{F} est une base de F et $\dim F = 3$.

E et F sont-ils en somme directe ? Donner une famille génératrice de $E \cap F$.

$$E \cap F = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} / a, e, k \text{ réels et } \underbrace{a = e = k}_{\substack{\text{la somme des} \\ \text{coeff de chaque ligne et colonne} \\ \text{est la même quelle que} \\ \text{soit la ligne ou colonne}}} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} / a \text{ réel} \right\} = \text{vect}(I_3).$$

Donc $E \cap F \neq \{O_3\}$ et E et F ne sont pas en somme directe. De plus (I_3) est une famille génératrice de $E \cap F$.

Soit $G = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d \\ a & b & c \end{pmatrix} / a, b, c, d \text{ réels} \right\}$. Montrer que $E \oplus G = M_3(\mathbb{R})$.

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d \\ a & b & c \end{pmatrix} / a, b, c, d \text{ réels} \right\} = \text{vect}(\mathcal{G}), \text{ où } \mathcal{G} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

Donc \mathcal{G} est un ss-e-v de $M_3(\mathbb{R})$.

Pour prouver que $E \oplus G = M_3(\mathbb{R})$, il suffit de montrer que toute matrice de $M_3(\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique comme somme d'une matrice de E et d'une matrice de G .

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. Je cherche tous les $A \in E$ et $B \in G$ telles que $M = A + B$.

Soit $A = \begin{pmatrix} x & y & \lambda - x - y \\ z & t & \lambda - z - t \\ \lambda - x - z & \lambda - y - t & -\lambda + x + y + z + t \end{pmatrix} \in E$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \\ \beta & \gamma & \delta \end{pmatrix} \in G$. On cherche donc tous les réels $a, y, z, t, \lambda, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ tels que $M = A + B$.

$$M = A + B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & \lambda - x - y \\ z & t & \lambda - z - t \\ \lambda - x - z & \lambda - y - t & -\lambda + x + y + z + t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \\ \beta & \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = x \\ b = y \\ c = \lambda - x - y \\ d = z \\ e = t \\ f = \lambda - z - t + \alpha \\ g = \lambda - x - z + \beta \\ h = \lambda - y - t + \gamma \\ k = -\lambda + x + y + z + t + \delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ y = b \\ \lambda = a + b + c \\ z = d \\ t = e \\ \alpha = f + d + e - (a + b + c) \\ \beta = g + a + d - (a + b + c) \\ \gamma = h + b + e + (a + b + c) \\ \delta = k - (a + b + d + e) + (a + b + c) = k - d - e + c \end{cases}$$

Donc, il existe des uniques matrices $A \in E$ et $B \in G$ telles que $M = A + B$. Ainsi, E et G sont supplémentaires dans $M_3(\mathbb{R})$.