EXERCICES soutien et colle 24-25-26 **(*exercices plus ou moins traités en classe,** certaines questions sont plus théoriques ou astucieux)**

BASE -DIMENS ION-SUPPLEMENTAIRE

Ex1* Soit $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + 2t = z - y\}$ et $G = \{(a, b, 3a, a + b))/a, b \text{ réels}\}$

1. Montrer que H et G sont deux ss-e-v de $\mathbb{R}^4$. Déterminer la dimension de chacun de ces espaces.
2. Déterminer une base de $H \cap G$ et une base de $H + G$.
3. H et G sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?
4. Déterminer un supplémentaire de H dans $\mathbb{R}^4$.

Ex2* Déterminer une base de $F = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \forall n, u_{n+2} + 2u_{n+1} + 2u_n = 0\}$ et une base de $G = \{f \in D^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \ \ / \forall x, f''(x) + 2f'(x) + 2f(x) = 0\}$.

Ex3**Soit E un K-e-v de dimension 4 muni de la base $B = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}, \vec{s})$.

Soit $F = \{x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} + t\vec{s} / x, y, z, t \ \in K \ et \ x + y = z + t\}$ et $G =$vect$(\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}, 3\vec{\imath} - \vec{\jmath})$.

a. Justifier que G est un ss-e-v de E et déterminer une base de G. Faire de même pour F.
b. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.
c. Trouver un **autre** supplémentaire de F dans E.
d. Compléter $G = \{x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} + t\vec{s} / x, y, z, t \ \in K \ et \ \ldots\ldots\}$

Soit $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ trois vecteurs de E tels que $mat_B(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}) = \begin{pmatrix} 1+x & x & x & x \\ y & 1+y & y & y \\ z & z & 1+z & z \\ t & t & t & 1+t \end{pmatrix}$ où $(x, y, z, t) \in K^4$.

e. Exprimer $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\,, \vec{d}$ en fonction de $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k} \ et \ \vec{s}$.
f. $H = \{(x, y, z, t) \in K^4 / (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$ est une famille libre$\}$ est -il un ss-e-v de K^4?

Ex4* Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] / 2P(1) = P''(0)\}$ et $G = \{(X - 3)P / P \in \mathbb{R}_2[X]\}$

1. Montrer que $F =$vect$(X - 1, X^3 - 1, X^2)$.
2. Montrer que G est un ss-e-v de $\mathbb{R}_3[X]$ et déterminer la dimension de G.
3. F et G sont-il supplémentaires dans $\mathbb{R}_2[X]$?
4. Trouver un supplémentaire H de F et de G.

**Ex5 ****Soit a et b deux réels distincts et F l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_4[X]$ qui admettent a et b comme racines.

1. Montrer que F est un ss-e-v de $\mathbb{R}_4[X]$ et donner sa dimension .
2. Trouver une supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_4[X]$.

Ex6* Soit $A = diag(1,2,3)$ et $F = \{M \in M_3(\mathbb{R}) / AM = MA\}$ et $G = \{M \in M_3(\mathbb{R}) / tr(M) = 0\}$.

1. Montrer que F est un ss-e-v de $M_3(\mathbb{R})$ et trouver sa dimension. Faire de même pour G.
2. Déterminer une base de $F + G$ et une base de $F \cap G$.
3. Trouver un supplémentaire de G dans $M_3(\mathbb{R})$.

Ex7** H l'ensemble des fonctions continues sur $[-1; 1]$ et affines sur $[-1, 0]$ et affines sur $[0,1]$.

1. Montrer que H est un ss-e-v de $C^0([-1,1], \mathbb{R})$ de dimension finie.
2. Soit $G = \{f \in \ C^0([-1,1], \mathbb{R}) / \ f(0) = f(-1) = f(1) = 0\}$. Montrer que $F \oplus G = C^0([-1,1], \mathbb{R})$.

Ex8**Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ et $\mathscr{L} = (\vec{u}_i)_{i=1..n}$une famille libre de vecteur d'un K- espace vectoriel E.

1. Etudier la liberté de la famille $\mathscr{F} =(\vec{u}_1 + \vec{u}_2, \vec{u}_2 + \vec{u}_3, .., \vec{u}_{n-1} + \vec{u}_n, \vec{u}_1 + \vec{u}_n)$.
2. Soit $p \in [\![1, n-1]\!]$. Justifier que $vect(\vec{u}_1, .., \vec{u}_p)$ et $vect(\vec{u}_{p+1}, .., \vec{u}_n)$ sont en somme directe.
3. Soit F et G deux ss-e-v de E tels que : $F \oplus G=E$ et $G = vect(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p)$.Soit $\vec{a} \in F$ et $G_{\vec{a}} = vect(\vec{a} + \vec{u}_1, \vec{a}+\vec{u}_2, .., \vec{a} + \vec{u}_p)$.
   a. Montrer que G_a et F sont supplémentaires dans E.
   b. Justifier que G_a est de dimension finie et déterminer sa dimension.
4. Ici E est de dimension finie p, de base $\mathscr{B}= (\vec{e}_i)_{i=1..p}$. On pose : $\forall i \in [\![1, p-1]\!], \vec{\varepsilon_i} = \vec{e}_i - (\vec{e}_{i+1} + \vec{e}_{i+2} + .. + \vec{e}_p)$ et $\vec{\varepsilon_p} = \vec{e_p}$. Montrer que $\mathscr{B}' = (\vec{\varepsilon_i})_{i=1..p}$est une base de E . Soit $\vec{x} \in E$. Exprimer les composantes de $\vec{x}$ dans la base $\mathscr{B}'$ en fonction les composantes de $\vec{x}$ dans B.

Ex9* $E = \mathbb{R}^n$, $\mathrm{U} = (1,1, .., 1,1) \in \mathbb{R}^n$ et $F = vect(\mathrm{U})$et $G = \{(x_1, x_2, .., x_n) \in \mathbb{R}^n / \sum_{k=1}^n x_k = 0\}$. Justifier que F et G sont des ss-e-v de E et déterminer leur dimension. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E .

Ex 10**Soit $F = \{(x \mapsto ach(x) + bsh(x)) / \ (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ et $G = \{f \in D(\mathbb{R}, \mathbb{R}\} / f(0) = f'(0) = 0\}$.

1. Montrer que F et G sont deux ss-e-v de $D(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Déterminer la dimension de F.
2. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $D(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. En déduire la dimension de G.
3. Décomposer exp puis cos dans cette somme directe.
4. Donner un plan vectoriel de $D(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui n'est pas supplémentaire de G dans $D(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

LIBERTE

5. $\forall k \in \mathbb{N}^*, f_k : t \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{k}{t^2}} \ si \ t \neq 0 \\ 0 \ si \ t = 0 \end{cases}$. Montrer que$\forall n \in \mathbb{N}, (f_0, f_1, \ldots, f_n)$ est une famille libre de **<u>vecteurs de G.</u>** Qu'en déduit-on à nouveau sur G ?

Ex11* Soit , $f_0 = 2$, $f_1 : (x \mapsto \ln(3x)), f_2 : (x \mapsto \frac{1}{x})$, $f_3 : (x \mapsto \ln(9x)), f_4 : \left(x \mapsto \frac{1}{x^2+x}\right), f_5 : \left(x \mapsto \frac{1}{x+1}\right), f_6 : \left(x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}\right)$.
Déterminer $rg(f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)$.

Ex 12* Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $f_k : (t \mapsto e^{kt})$ .Montrer que $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ est libre.

Ex13** $\forall a \in \mathbb{R}, \varphi_a : \left(x \to \begin{cases} 1 \ si \ x = a \\ 0 \ si \ x \neq a \end{cases}\right)$. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Montrer que la famille $(\varphi_a)_{a \in I}$ est libre dans $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.