DL 3 Algèbre linéaire pour mercredi 3 juin

Dans tout le problème, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de **dimension 3** .
Pour u endomorphisme de E et n entier naturel non nul , on note $u^n = u \circ u \circ \ldots \circ u = u^{n-1} \circ u$ (n fois) .
On note $M_3(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3 , $GL_3(\mathbb{R})$l'ensemble des matrices inversibles de $M_3(\mathbb{R})$ et I la matrice unité de $M_3(\mathbb{R})$.
Définition: Pour deux matrices A *et* B de $M_3(\mathbb{R})$, on dit que la matrice A est semblable à la matrice B lorsqu'il existe une matrice P de $GL_3(\mathbb{R})$ telle que : $A = P^{-1}BP$.

PARTIE I

1. Soit $(A, B, C) \in M_3(\mathbb{R})^3$. Montrer que :
- **a.** A est semblable à A .
- **b.** Si A est semblable à B alors B est semblable à A.
- **c.** Si A est semblable à B et B semblable à C alors A est semblable à C.
- **d.** Si A est semblable à B alors $detA = detB$, $trA = trB$ *et* $rgA = rgB$.
- **e.** A est semblable à B si et ssi A *et* B sont deux matrices d'un même endomorphisme.

PARTIE II

2. Soit u un endomorphisme de E et soient i *et* j deux entiers naturels.
On considère l'application w de $Ker\ (u^{i+j})$ vers E définie par : $w(x) = u^j\ (x)$.
- a. Montrer que $Im(w) \subset Ker\ (u^i)$.
- b. En déduire que $dim(Ker\ u^{i+j}) \leq dim(Ker\ (u^i)\ ) + dim(Ker\ (u^j)\ )$

3. Soit u un endomorphisme de E vérifiant : $u^3 = 0$ *et* $rg(u) = 2$
- a. Montrer que $dim(Ker\ u^2) = 2$ (on pourra utiliser deux fois la question 2b.)
- b. Montrer que l'on peut trouver un vecteur a non nul de E tel que $u^2(a) \neq 0$ et en déduire que la famille $(u^2(a), u(a), a)$ est une base de E.
- c. Ecrire la matrice U *de* u et la matrice V *de* $u^2 - u$ dans cette base.

4. Soit u un endomorphisme de E vérifiant : $u^2 = 0$ *et* $rg(u) = 1$
- a. Montrer que l'on peut trouver un vecteur b non nul de E tel que $u(b) \neq 0$
- b. Justifier l'existence d'un vecteur c de $Ker\ (u\ )$tel que $(u(b), c)$ soit libre puis montrer que la famille ($b, u(b)$, c) est une base de E.
- c. Ecrire la matrice U' *de* u et la matrice V' *de* $u^2 - u$ dans cette base.

PARTIE III

Soit désormais une matrice A de $M_3(\mathbb{R})$ semblable à une matrice du type $T=\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On se propose de montrer que A est semblable à son inverse A^{-1} .

On pose alors $N=\begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$et soit P de $GL_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = T = I + N$

5. Expliquer pourquoi la matrice A^{-1} existe.

6. Calculer N^3et montrer que $P^{-1}A^{-1}P = I - N + N^2$.

7. Quel est le rang de N ?

8. On suppose dans cette question que $N = 0$ ie. $rgN = 0$. Montrer alors que les matrices A *et* A^{-1} sont semblables.

9. On suppose dans cette question que $g(N) = 2$. On pose $M = N^2 - N$.
- **a.** Montrer que la matrice N est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$et en déduire une matrice simple semblable à M .

  (on pourra introduire l'endomorphisme de E dont la matrice dans une base fixée de *est* N).

- **b.** Calculer M^3 et $rg(M)$.
- **c.** Montrer que les matrices N *et* M sont semblables.
- **d.** Montrer que les matrices A *et* A^{-1} sont semblables.

10. On suppose dans cette question que $g(N) = 1$. On pose $M = N^2 - N$.
Montrer que les matrices A *et* A^{-1} sont semblables.

11. **Exemple** : soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A .
- **a.** Déterminer tous les réels λ tels que l'équation $u(X) = \lambda X$ admette une solution X non nulle. Trouver alors une base $Ker(u - \lambda id)$.
- **b.** Montrer que A est semblable à $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- **c.** Conclure que les matrices A *et* A^{-1} sont semblables.

12. Toute matrice de $M_3(\mathbb{R})$ semblable à son inverse est – elle semblable à une matrice du type T ?