

## Révisions sur les équivalents et DL usuels et les méthodes d'obtention

## Chapitre 21 Matrices d'une application linéaire .

Cf programme précédent

## Chapitre 22 Espaces préhilbertiens réels

I Produit scalaire et norme

- Définition d'un produit scalaire . Définition d'un espace préhilbertien réel  $E$ .

l'application  $\varphi : \left( \begin{array}{c} E^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{x}, \vec{y}) \mapsto (\vec{x}/\vec{y}) \end{array} \right)$  est un produit scalaire sur le  $\mathbb{R}$ -e-v  $E$  lorsque

- ✓  $\varphi$  est bilinéaire :  $\forall (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \in E^3, (\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}/\vec{z}) = \alpha(\vec{x}/\vec{z}) + \beta(\vec{y}/\vec{z})$  et  $(\vec{z}/\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \alpha(\vec{z}/\vec{x}) + \beta(\vec{z}/\vec{y})$
- ✓  $\varphi$  est symétrique :  $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, (\vec{x}/\vec{y}) = (\vec{y}/\vec{x})$ .
- ✓  $\varphi$  est définie positive :  $\forall \vec{x} \in E, (\vec{x}/\vec{x}) \geq 0$  et  $[(\vec{x}/\vec{x}) = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}]$ .
- Produit scalaire usuel (canonique) dans  $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_n[X], M_n(\mathbb{R}), C^0([a, b], \mathbb{R}), \mathbb{R}[X]$ .
- Règles de calcul et inégalité de Cauchy-Schwarz.
  - ✓  $\forall \vec{x} \in E, (\vec{x}/\vec{0}) = 0$
  - ✓  $\forall (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n, \vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_p) \in E^{n+p}, \forall (\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_p) \in \mathbb{R}^{n+p}, (\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i / \sum_{i=1}^p \beta_i \vec{y}_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_j (\vec{x}_i / \vec{y}_j)$ .
  - ✓  $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, (\vec{x}/\vec{y})^2 \stackrel{C.S.}{\leq} (\vec{x}/\vec{x})(\vec{y}/\vec{y})$ .

- Définition d'une norme .

l'application  $N : \left( \begin{array}{c} E \rightarrow \mathbb{R} \\ \vec{x} \mapsto \|\vec{x}\| \end{array} \right)$  est une norme sur le  $\mathbb{R}$ -e-v  $E$  lorsque

- ✓  $\forall \vec{x} \in E, \|\vec{x}\| \geq 0$
- ✓  $\forall \vec{x} \in E, [\|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}]$
- ✓  $\forall \vec{x} \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda\vec{x}\| = |\lambda| \|\vec{x}\|$
- ✓  $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, \|\vec{x} + \vec{y}\| \stackrel{I.T.}{\leq} \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ . Inégalité triangulaire
- Norme euclidienne (norme associée à un produit scalaire). Nouvelle écriture de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
  - ✓  $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, |(\vec{x}/\vec{y})| \stackrel{C.S.}{\leq} \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|$ .
- Identité de polarisation  $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, (\vec{x}/\vec{y}) = \frac{1}{4} [\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 - \|\vec{x} - \vec{y}\|^2]$ .

II Orthogonalité dans un espace préhilbertien  $E$ 

- Définition de deux vecteurs de  $E$  orthogonaux :  $\vec{x} \perp \vec{u}$  lorsque  $(\vec{x}/\vec{u}) = 0$ , d'un vecteur orthogonal à une partie  $X$  de  $E$  :  $\vec{u} \perp X$  lorsque  $\forall \vec{x} \in X, (\vec{x}/\vec{u}) = 0$ , de deux parties de  $E$  orthogonales :  $Y \perp X$  lorsque  $\forall \vec{x} \in X, \forall \vec{y} \in Y, (\vec{x}/\vec{y}) = 0$
- Définition de l'orthogonal d'une partie de  $E$ . L'orthogonal  $X^\perp = \{\vec{u} \in E / \forall \vec{x} \in X, (\vec{x}/\vec{u}) = 0\}$ .
- L'orthogonal  $X^\perp$  d'une partie  $X$  de  $E$  est un sous-espace-vectoriel de  $E$  et  $X^\perp = (\text{vect}(X))^\perp$ .
- Propriétés :
  - ✓ Si  $X \subset Y$  alors  $Y^\perp \subset X^\perp$ .
  - ✓ Si deux ss-e-v  $F$  et  $G$  de  $E$  sont orthogonaux alors  $F$  et  $G$  sont en somme directe et  $G$  est un ss-e-v de  $F^\perp$  et  $F$  est un ss-e-v de  $G^\perp$
- Caractérisation de l'orthogonal d'un ss-e-v de  $E$  engendré par une famille de vecteurs :
  - ✓ Si  $F = \text{vect}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$  alors  $[\vec{x} \in F^\perp \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, (\vec{x}/\vec{u}_i) = 0]$ .
  - ✓ Si  $F = \text{vect}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$  et  $G = \text{vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$  alors  $[F \perp G \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, (\vec{u}_i/\vec{v}_j) = 0]$ .
- Définition d'une famille orthogonale, orthonormale, d'une base orthogonale et d'une base orthonormale.
- Base orthonormée de  $\mathbb{R}^n$  muni du p.s canonique . Idem dans  $\mathbb{R}_n[X], M_n(\mathbb{R})$ .
- Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre. Toute famille orthonormée est libre.
- **Théorème de Pythagore** :  $\vec{x} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \|\vec{x} + \vec{u}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{u}\|^2$ . Et la généralisation de «  $\Rightarrow$  » : Si  $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$  est une famille orthogonale alors  $\|\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{u}_i\|^2 = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \|\vec{u}_i\|^2$ .
- **Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt** : Si  $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$  est une famille libre de vecteurs de  $E$  alors il existe une famille orthonormée de vecteurs  $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$  de  $E$  tel que  $\forall i, \vec{e}_i \in \text{vect}((\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_i))$ .

III Espace euclidien  $E$ 

- Définition d'un espace euclidien  $E$ .
- **Existence d'une BON** : tout espace euclidien de dimension non nulle possède une BON.
- **Théorème de la base incomplète** : toute famille orthonormée d'un espace euclidien peut être complétée pour obtenir une BON de cet espace.

- **Ecriture dans une BON** : Soit  $B = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$  une BON de l'espace euclidien  $E$ . Alors pour tout  $(\vec{x}, \vec{y}) \in E^2$  tels que  $\vec{x} = \sum_{k=1}^n x_k \vec{e}_k$  et  $\vec{y} = \sum_{k=1}^n y_k \vec{e}_k$ , on a :  $x_k = (\vec{x}/\vec{e}_k)$ ,  $(\vec{x}/\vec{y}) = \sum_{k=1}^n x_k y_k$  et  $\|\vec{x}\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$ .

## IV Orthogonal d'un ss-e-v de dim. finie. Projection orthogonale sur un tel ss-e-v.

- **Théorème sur le supplémentaire orthogonal** Si  $F$  est un ss-e-v de dimension finie d'un espace préhilbertien réel  $E$  alors  $F^\perp$  est le seul ss-e-v de  $E$ , orthogonal à  $F$  et supplémentaire de  $F$  dans  $E$  i.e.  $F \oplus F^\perp = E$  et  $F^\perp \perp F$

$F^\perp$  est alors appelé le supplémentaire orthogonal de  $F$ .

- Si  $F$  est un ss-e-v de dimension finie d'un espace préhilbertien réel alors la projection orthogonale sur  $F$  notée  $p_F$  est alors la projection sur  $F$  et parallèlement à  $F^\perp$ .

- **Caractérisation du projeté orthogonal sur  $F$  :**

✓  $\forall \vec{x} \in E, p_F(\vec{x})$  est le seul vecteur de  $E$  qui vérifie :  $\begin{cases} p_F(\vec{x}) \in F \\ \vec{x} - p_F(\vec{x}) \in F^\perp \end{cases}$ .

- ✓ Si  $B = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$  est une **base de  $F$**  alors  $\forall \vec{x} \in E, p_F(\vec{x})$  est le seul vecteur de  $E$  qui vérifie :

$$\begin{cases} p_F(\vec{x}) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \vec{u}_k \\ \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, (\vec{x} - \sum_{k=1}^n \alpha_k \vec{u}_k / \vec{u}_j) = 0 \end{cases}$$

- ✓ Si  $B = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$  est une **BON de  $F$**  alors  $\forall \vec{x} \in E, p_F(\vec{x}) = \sum_{k=1}^n (\vec{e}_k / \vec{x}) \vec{e}_k$ .

- **Caractérisation du projection orthogonale**: Si  $E$  est un espace euclidien et  $F$  est un ss-e-v de  $E$  alors

$$f \text{ est la projection orthogonale sur } F \text{ si et seulement si } \begin{cases} f \in \mathcal{L}(E) \\ f \circ f = f \\ \text{Im}(f) \perp \text{Ker}(f) \end{cases}$$

- **Distance à un ss-e-v de dimension finie  $F$ :**

✓  $\forall \vec{x} \in E, \forall \vec{f} \in F, \|\vec{x} - p_F(\vec{x})\| \leq \|\vec{x} - \vec{f}\|$ .

✓  $\forall \vec{x} \in E, d(\vec{x}, F) = \inf \{\|\vec{x} - \vec{f}\| / \vec{f} \in F\} = \min \{\|\vec{x} - \vec{f}\| / \vec{f} \in F\} = \|p_{F^\perp}(\vec{x})\| = \|\vec{x} - p_F(\vec{x})\|$

- **Projeté orthogonal sur une droite vectorielle** : Soit  $D = \text{vect}(\vec{u})$ , droite vectorielle engendrée par  $\vec{u}$ .  $\forall \vec{x} \in E, p_D(\vec{x}) = \frac{(\vec{x}/\vec{u})}{(\vec{u}/\vec{u})} \vec{u}$ .

- **Hyperplan dans un espace euclidien**: Soit  $H$  un hyperplan d'un espace euclidien  $E$ .

- ✓ Tout vecteur  $\vec{N}$  engendrant  $H^\perp$  est un vecteur normal à  $H$ .

- ✓ Soit  $(\vec{e}_i)$  une BON de  $E$ . Si  $\vec{N} = \sum_{i=0}^n a_i \vec{e}_i$  normal à  $H$  alors  $H = \{\sum_{i=0}^n x_i \vec{e}_i / \sum_{i=0}^n a_i x_i = 0\}$ .

- ✓  $\forall \vec{x} \in E, p_H(\vec{x}) = \vec{x} - \frac{(\vec{x}/\vec{N})}{(\vec{u}/\vec{N})} \vec{N}$  et  $d(\vec{x}, H) = \frac{|(\vec{x}/\vec{N})|}{\|\vec{N}\|} = \frac{\sum_{i=0}^n a_i x_i}{\sqrt{\sum_{i=0}^n a_i^2}}$ .

### Questions de cours :

1. Procédé d'ortho-normalisation de Gram-Schmidt.
2. Supplémentaire orthogonal : si  $F$  est un ss-e-v de dimension finie d'un espace préhilbertien réel  $E$  alors  $F^\perp$  est le seul sous-e-v de  $E$ , orthogonal à  $F$  et supplémentaire de  $F$  dans  $E$ .
3. Projection orthogonale sur une droite vectorielle et sur un hyperplan.