Applications linéaires. Dans tout le chapitre, E et F sont deux K- espaces vectoriels

Rappels importants :

1. Une application f de E dans F est **injective** (ou injective sur E)
   - lorsque tout élément de F a au plus un antécédent par f dans E .
   - lorsque deux éléments de E ayant la même image par f sont égaux
   - lorsque deux éléments de E distincts ont deux images distinctes.
2. Une application f de E dans F est **surjective** (ou surjective de E sur F)lorsque tout élément de F a au moins un antécédent par f dans E i.e. lorsque $f(E) = F$.
3. Une application f de E dans F est **bijective** (ou bijective de E sur F)
   - lorsque f est injective et surjective de E sur F
   - lorsque tout élément de F a exactement un antécédent par f dans E
   - lorsqu'il existe une application g de F sur E telle que : $f \circ g = id_F et\ g \circ f = id_E$.

Dans ce cas, on définit $g = f^{-1}: F \to E$ telle que $\forall y \in F, f^{-1}(y) = l'unique\ antécédent\ de\ y\ par f$.

4. Si f est une application de E dans F et A est un sous-ensemble de E et B un sous-ensemble de F alors
   - $f(A) = \{f(x)/x \in A\}$ est **l'image directe** de A par f et contient toutes les images par f de tous les éléments de A
   - $f^{-1}\langle B\rangle = f^{-1}(B) = \{x \in E/f(x) \in B\}$ est **l'image réciproque** de B par f et contient tous les antécédents de tous les éléments de B.
   - $f_{/A}$, **la restriction de f à A**, est l'application définie sur A par : $\forall x \in A, f_{/A}(x) = f(x)$. 1

Application linéaire

Application linéaire f est une <u>application linéaire</u> de E dans F (ou un morphisme d'espaces vectoriels).lorsque

•f est une application de E dans F

•• $\forall(\vec{x},\vec{y}) \in E^2, \forall(\alpha,\beta) \in K^2, f(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}) \overset{(*)}{=} \alpha f(\vec{x}) + \beta f(\vec{y})$

ou $\forall(\vec{x},\vec{y}) \in E^2, \forall\alpha \in K, \begin{cases} f(\vec{x}+\vec{y}) + f(\vec{x}) + f(\vec{y}) \\ f(\alpha\vec{x}) + \alpha f(\vec{x}) \end{cases}$.

On note $\mathscr{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F . 2

Morphisme particuliers et notation ensembliste :

1. Un **endomorphisme** de E est une application linéaire de E dans E . $\mathscr{L}(\boldsymbol{E})$ est l'ensemble des endomorphismes de E
2. Un **isomorphisme** de $E\ sur\ F$ est une application linéaire de $E\ dans\ F$, bijective de $E\ sur\ F$. Lorsqu'il existe un isomorphisme de $E\ sur\ F$, on dit que $E\ et\ F$ sont **isomorphes. Isom($\boldsymbol{E},\boldsymbol{F}$)** est l'ensemble des isomorphismes de $E\ sur\ F$
3. Un **automorphisme** de E est un isomorphisme de $E\ sur\ E$. $\boldsymbol{GL}(\boldsymbol{E})$ est l'ensemble des automorphismes de E dit groupe linéaire.
4. Une **forme linéaire** sur E est une application linéaire de E dans K. $\boldsymbol{E}^*$ est l'ensemble des formes linéaires sur E. 3

Règles de calcul *démo* Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ alors

1. $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$
2. $\forall\vec{x} \in E, f(-\vec{x}) = -f(\vec{x})$
3. $\forall(\alpha_1,\dots,\alpha_m) \in K^m, \forall(\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_m) \in E^m$, $f(\sum_{i=1}^m \alpha_i\vec{u}_i) = \sum_{i=1}^m \alpha_i f(\vec{u}_i)$. 4

Exemples de référence 5

- **l' identité sur $\boldsymbol{E}$,** $id_E: (\vec{x} \mapsto \vec{x})$, est un automorphisme de E.
- ω : $\begin{pmatrix} E \to F \\ \vec{x} \mapsto \overrightarrow{0_F} \end{pmatrix} \in \mathscr{L}(E,F)$. ω, **le morphisme nul**, est noté 0 ou $0_{\mathscr{L}(E,F)}$.
- ω : $\begin{pmatrix} E \to E \\ \vec{x} \mapsto \overrightarrow{0_E} \end{pmatrix} \in \mathscr{L}(E)$. ω, **l'endomorphisme nul**, est noté 0 ou $0_{\mathscr{L}(E)}$.
- $h_\alpha: \begin{pmatrix} E \to E \\ \vec{x} \mapsto \alpha\vec{x} \end{pmatrix}$, **homothétie vectorielle** de rapport $\alpha \in K^*$, est un automorphisme de E de bijection réciproque $h_{\frac{1}{\alpha}}$.
- Soit $A \in M_{n,p}(K)$. $\varphi_M: \begin{pmatrix} M_{p,1}(K) \to M_{n,1}(K) \\ X \mapsto AX \end{pmatrix}$ et $f: \begin{pmatrix} M_{p,q}(\mathbb{R}) \to M_{n,q}(\mathbb{R}) \\ M \mapsto AM \end{pmatrix}$ sont linéraires.
- Soit $A \in M_n(K)$. $\varphi_A: \begin{pmatrix} M_{n,1}(K) \to M_{n,1}(K) \\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto Y = AX = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \end{pmatrix}$ est un endomorphisme de $M_{n,1}(K)$.

Exemples déjà rencontrés 6

- Soit E un K-e-v de dimension n et B une base de E . $\Delta: \begin{pmatrix} E \to M_{n,1}(K) \\ \vec{x} \to mat_B\vec{x} \end{pmatrix}$ est un isomorphisme. E et $M_{n,1}(K)$ sont donc isomorphes.
- $f: \begin{pmatrix} M_n(K) \to K \\ M \mapsto tr(M) \end{pmatrix} \in M_n(K)^*$. (la trace est linéaire)
- $f: \begin{pmatrix} M_{p,q}(\mathbb{R}) \to M_{q,p}(\mathbb{R}) \\ M \mapsto M^T \end{pmatrix}$ est un isomorphisme et $f^{-1}: \begin{pmatrix} M_{q,p}(\mathbb{R}) \to M_{p,q}(\mathbb{R}) \\ M \mapsto M^T \end{pmatrix}$(la transposition est linéaire)
- $u: \begin{pmatrix} C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})) \\ f \mapsto f' \end{pmatrix} \in \mathscr{L}(C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}),C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}))$. (la dérivation est linéaire)
- $h: \begin{pmatrix} C^0([0,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}) \\ f \mapsto \int_0^1 f \end{pmatrix} \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})^\star$. (l'opérateur intégral est linéaire)
- Soit E le $\mathbb{R}$-e-v des suites réelles convergentes. $h: \begin{pmatrix} E \to \mathbb{R} \\ u \mapsto \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \end{pmatrix} \in E^\star$.(l'opérateur « limite » est linéaire)

Exercices 1 : 1) Soit $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ définie par :$f((x,y,z,t)) = (2x - y + t, y - z, 3x - t + 2z)$. Montrons que $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^4,\mathbb{R}^3)$

2) Soit h : $\begin{pmatrix} \mathbb{C}^\mathbb{N} \to \mathbb{C}^\mathbb{N} \\ u \mapsto (2u_n - 3u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \end{pmatrix}$. Montrons que $h \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^\mathbb{N})$.

3) Soit T : $\begin{pmatrix} C^0([0,1],\mathbb{R}) \to C^1([0,1],\mathbb{R}) \\ f \mapsto T(f): (x \mapsto \int_x^{x^2} f(t)dt) \end{pmatrix}$. Montrons que T est linéaire.

4) Soit φ: $\begin{pmatrix} \mathbb{R}_{2n}[X] \to \mathbb{R}_{2n}[X] \\ P \mapsto X(P(X) - P(1-X)) \end{pmatrix}$. Montrer que $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_{2n}[X])$.

5)Montrer que $f: \begin{pmatrix} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto xy \end{pmatrix}$, $g: \begin{pmatrix} \mathbb{R}^\mathbb{N} \to \mathbb{R}^2 \\ u \mapsto (u_0u_1, u_0 + u_1) \end{pmatrix}$, $h: \begin{pmatrix} K[X] \to K[X] \\ P \mapsto P(X)P'(1-X) \end{pmatrix}$ et $k: \begin{pmatrix} F(\mathbb{R},\mathbb{C}) \to \mathbb{C} \\ f \mapsto 2 + if(1) \end{pmatrix}$ ne sont pas linéaires.

6) $u: \begin{pmatrix} D^1(\mathbb{R},\mathbb{C}) \to F(\mathbb{R},\mathbb{C}) \\ f \mapsto a + f' + if(1)id_\mathbb{R} \end{pmatrix} \in \mathscr{L}(D^1(\mathbb{R},\mathbb{C}), F(\mathbb{R},\mathbb{C}))$sietssi $a = 0$.

Propriété fondamentale : *démo*

Soit $B = (\vec{e_i})_{i\in I}$ une base de E et $(\vec{y_i})_{i\in I}$ une famille de vecteurs de F . Il existe une et une seule application linéaire f de E vers F qui vérifie : $\forall i \in I, f(\vec{e}_i) = \vec{y}_i$.

Conséquence fondamentale

1. Toute application linéaire f de E vers F est entièrement déterminée (définie ou décrite) par la donnée des images par f des vecteurs d'une base de E.
2. Si deux applications linéaires de E vers F associent la même image à chaque vecteur d'une base ou d'une simple famille génératrice de E alors ces applications linéaires sont égales (partout !!).
3. Soit $E = E_1 \oplus E_2\ et\ u_1 \in \mathscr{L}(E_1,F)$ et $u_2 \in \mathscr{L}(E_2,F)$.Il existe une et une seule application linéaire u de E vers F telle que : $u_{/E_1} = u_1\ et\ u_{/E_2} = u_2$. : 7

En pratique, vous devez être capable de décrire cette unique application linéaire (Cf exercice suivant).

Exercices 2 :

1. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}[X])$ tel que $f(1) = 0$ et $f(X) = 1$ et $\forall k \geq 2, f(X^k) = kX^{k-1}\text{-}k(k\text{-}1)X^{k-2}$. Reconnaitre f (on donnera une expression de $f(P)$).
2. Soit $f \in \mathscr{L}(M_2(\mathbb{R}), \mathbb{R}^2)$ tq $f\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\right) = (1{,}0), f\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}\right) = (-1{,}0), f\left(\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\right) = (0,-1)$ et $f\left(\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}\right) = (0{,}1)$. Déterminer $f\left(\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\right)$.
3. Soit $u = (1{,}1), v = (2,-1)$ et $w = (1{,}4)$. Pour quelles valeurs du réel a, existe-t-il un endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ tel que : $f(u) = (2{,}1), f(v) = (1,-1)$ et $f(w) = (5, a)$?
4. Cherchons tous les endomorphismes de $\mathbb{R}$.

Opérations sur les applications linéaires *démo*

1. Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(E,F)$ alors $\alpha f + \beta g \in \mathscr{L}(E,F)$.
2. Si $g \in \mathscr{L}(F,G)$ et $f \in \mathscr{L}(E,F)$ alors $g \circ f \in \mathscr{L}(E,G)$.
3. Si f est un isomorphisme de E sur F alors f^{-1} est un isomorphisme de F sur E .
4. Si f et g sont deux isomorphismes de respectivement E sur F et F sur G alors $g \circ f$ est un isomorphisme de E sur G et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ est l'isomorphisme réciproque. **8**

Notation : dans $\mathscr{L}(E,F)$, $g \circ f$ est souvent notée gf ....

L'espace vectoriel $\mathscr{L}(E,F)$. *Démo* $(\mathscr{L}(E,F),+,.)$ est un sous espace vectoriel de $\mathscr{F}(E,F)$ et est donc un K-e-v. **9**

Règles de calcul dans $\mathscr{L}(E,F)$

Soit $\alpha \in K$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$ et $(f,h) \in \mathscr{F}(E,F)^2$ alors

1. $g \circ (f+h) = g \circ f + g \circ h$
(NB : l'égalité $(f+h) \circ g = f \circ g + h \circ g$ est vraie même si f, g, h ne sont pas linéaires)
2. $(\alpha g) \circ f = g \circ (\alpha f) = \alpha(g \circ f)$. **10**

Opérations dans $\mathscr{L}(E)$

1. Si f et $g \in \mathscr{L}(E)$ et $(\alpha,\beta) \in K^2$ alors $\begin{cases}\alpha f + \beta g & \in \mathscr{L}(E)\\ f \circ g \in \mathscr{L}(E)\end{cases}$
2. Si $f \in GL(E)$ alors $f^{-1} \in GL(E)$.
3. Si f et $g \in GL(E)$ alors $\begin{cases} f \circ g \in GL(E \\ (f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}\end{cases}$.

Attention : en général, $f \circ g \neq g \circ f$, et $f \circ g$ est noté fg. **11**

$\mathscr{L}(E)$ est stable par composition et combinaison linéaire (addition et multiplication externe) . $\mathscr{L}(E)$ est un K-e-v.
$GL(E)$ est stable par composition et passage à l'inverse.

NB : $GL(E)$ n'est pas stable par $c.l.$ car $\underbrace{id_E}_{\in GL(E)} - \underbrace{id_E}_{\in GL(E)} = \underbrace{0_{\mathscr{L}(E)}}_{\notin GL(E)}$ **12**

Puissances et polynômes d'endomorphismes

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

1. $f^0 = id_E$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, f^n = f^{n\text{-}1} \circ f = f \circ f^{n\text{-}1} = f \circ \ldots \circ f \in \mathscr{L}(E)$.Les endomorphismes f^n de E sont **les itérés de f** .
2. f est **nilpotent** lorsqu'il existe un entier naturel p tel que $f^p = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
3. Soit $P \in K[X]$ tq $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Alors
$P(f) = \sum_{k=0}^{n} a_k f^k = a_0 id_E + a_1 f + a_2 f^2 + \cdots + a_n f^n$. **13**

Règles de calcul - Factorisation et binôme de Newton

Soit $(f,g,u,v) \in \mathscr{L}(E)^4, (\alpha,\beta,a,b) \in K^4$ et $(n,p) \in \mathbb{N}^2$

1. $(\alpha f + \beta g) \circ (au + bv) = \alpha a(f \circ u) + \alpha b(f \circ v) + \beta a(g \circ u) + \beta b(g \circ v)$
2. $(\alpha f)^p = \alpha^p f^p$ et $id^p = id$ et $f^p f^n = f^{p+n}$ et $(f^p)^n = f^{pn}$.
3. Si $P = QB + R$ où $(P,Q,R,B) \in K[X]^4$ alors $P(f) = Q(f)B(f) + R(f) = R(f) + B(f)Q(f)$.
4. Si $\underbrace{f \circ g = g \circ f}_{f \text{ et } g \text{ commutent}}$, alors

- $\underbrace{(f \circ g)^n}_{(f \circ g)\circ(f \circ g)\circ\ldots\circ(f \circ g)} = f^n \circ g^n = g^n \circ f^n$
- $\underbrace{(f+g)^n}_{(f+g)\circ(f+g)\circ\ldots\circ(f+g)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{f^k g^{n-k}}_{f\circ f\circ\ldots\circ f\circ g\circ g\circ\ldots\circ g}$
- $\underbrace{f^{n+1} - g^{n+1}}_{f\circ f\ldots\circ f\, -\, g\circ g\ldots\circ g} = \underbrace{(f-g)(\sum_{k=0}^{n} f^k g^{n-k})}_{(f-g)\circ(\sum_{k=0}^{n} f\circ f\ldots\circ f\circ g\circ g\ldots\circ g)}$.

En particulier, f et id commutent toujours puisque $f \circ id = f = id \circ f$ donc
$\forall n \in \mathbb{N}$, $(id + f)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k$ et $id - f^{n+1} = (id - f) \circ (\sum_{k=0}^{n} f^k)$. **14**

Exemple3 : si $f^2 + 2f - 3id = 0$ alors $id = \frac{1}{3}(f^2 + 2f) = \frac{1}{3}(f + 2id) \circ f = f \circ \frac{1}{3}(f + 2id)$ et j' en conclus que f est bijective et $f^{-1} = \frac{1}{3}(f + 2id)$.

Noyau : Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Le **noyau** de f noté $Ker(f)$ ou $Kerf$ est l'ensemble de tous les antécédents de $\overrightarrow{0_F}$ par f i.e. l'ensemble des vecteurs de E dont l'image par f vaut $\overrightarrow{0_F}$. $Kerf = \{\vec{x} \in E / f(\vec{x}) = \overrightarrow{0_F}\}$.
Autrement dit, $\vec{x} \in Kerf \Leftrightarrow \vec{x} \in E$ et $f(\vec{x}) = \overrightarrow{0_F}$. **15**

Le ss-e-v $Ker(f)$ *démo* Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.
$Ker(f)$ est un sous espace vectoriel de E. **16**

Image d'une application linéaire : Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.
L'**image** de f, notée $Im(f)$ ou Imf , est l'ensemble de toutes les images par f de tous les éléments de E .
$Im(f) = \{f(\vec{x}) / \vec{x} \in E\} = \{\vec{y} \in F / \exists \vec{x} \in F; \vec{y} = f(\vec{x})\} = f(E)$.
Autrement dit, $\vec{y} \in Imf \Leftrightarrow \exists \vec{x} \in E / f(\vec{x}) = \vec{y}$. **17**

Le ss-e-v $Im(f)$ *démo* . Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.
$Im(f)$ est un sous espace vectoriel de F. **18**

Rang d'une application Le **rang de f** , ***notée $rg(f)$***, est, par déf°, la dimension de $Im(f)$. Donc, $rg(f) = dim(Im(f))$.
Alors, $rg(f) \leq min(dimE, dimF)$. **19**

Noyau et Image d'une matrice Soit $M \in M_{n,p}(K)$.
$Ker(M) = \{X \in M_{p,1}(K) / MX = 0\} = Ker(\varphi_M)$ **noyau de M**
$Im(M) = \{MX / X \in M_{p,1}(K)\} = Im(\varphi_M)$ **image de M**
où $\varphi_M : \begin{pmatrix} M_{p,1}(K) \to M_{n,1}(K) \\ X \mapsto MX \end{pmatrix}$. **20**

Csq : $rg(M) = rg(\varphi_M)$ et
$M \in M_n(K)$ est inversible sietssi $Ker(M) = \{0_{n,1}\}$. **21**

Famille génératrice de $Im(f)$ *démo* Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $\mathscr{F} = (\vec{e_i})_{i\in I}$ est une famille génératrice (ou une base) de E alors $f(\mathscr{F}) = (f(\vec{e_i}))_{i\in I}$ est une famille génératrice de $Im(f)$ et $rg(f) = rg\left((f(\vec{e_i}))_{i\in I}\right) = rg(f(B))$. **22**

Exercice4 : Soit $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ définie par : $f(P) = XP' - P$. Montrer que $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}[X])$. Décrire $Im(f)$ et $Ker(f)$.

Théorème du rang : Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Si E est de dimension finie alors $rg(f) + \dim(Kerf) = dimE$ **(démo plus tard)** **23**

Exercice5 : Soit E un K-e-v rapporté à la base $B = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$.
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f(\vec{a}) = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$, $f(\vec{b}) = \vec{a} + \vec{d}$, $f(\vec{c}) = \vec{a} + \vec{d}$ et $f(\vec{d}) = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$. A-t-on $Ker(f) \oplus Im(f) = E$?

A savoir justifier *démo* **: Soit $g \in \mathscr{L}(F,G)$ et $f \in \mathscr{L}(E,F)$.**

1. $g \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$ <u>si et ssi</u> $Im(f) \subset Ker(g)$.
2. $Ker(f) \subset Ker(g \circ f)$ et $Im(g \circ f) \subset Im(g)$.

Pour tout endomorphisme f de E,

1. $\forall k \in \mathbb{N}, Ker(f^k)$ et $Im(f^k)$ sont des ss-e-v de E tels\ que $Ker(f^k) \subset Ker(f^{k+1})$ et $Im(f^{k+1}) \subset Im(f^k)$.
Les deux suites $(Im(f^k))_{k\in\mathbb{N}}$ et $(Ker(f^k))_{k\in\mathbb{N}}$ de ss-e-v de E:sont respectivement décroissante et croissante au sens de l'inclusion.
2. Si E est de dimension finie alors les suites $(Im(f^k))_{k\in\mathbb{N}}$ et $(Ker(f^k))_{k\in\mathbb{N}}$ sont stationnaires.
3. $f^2 = 0$ <u>si et ssi</u> $Imf \subset Kerf$. **24**

Image directe ou réciproque d'un ss-e-v. Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$

1. Si G est un ss e v de F alors $f^{-1}\langle G\rangle$ est un ss e v de E
2. Si H est un ss e v de E alors $f(H)$ est un ss e v de F. **25**

Cas particulier: $f^{-1}\langle\{\overrightarrow{0_F}\}\rangle = Ker(f)$ et $f(\mathrm{E}) = Im(f)$.

Ss-e-v stable Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et H un ss e v de E (alors $f(H)$ est un ss e v de E). H est stable par f lorsque $f(H) \subset H$ (i.e. lorsque $\forall \vec{x} \in H, f(\vec{x}) \in H$) et dans ce cas, $f_H: \begin{pmatrix} H \to H \\ \vec{x} \mapsto f(\vec{x}) \end{pmatrix}$ est un endomorphisme de H appelé l'endomorphisme induit par f sur H. **26**

Exemple : Soit $E = E_1 \oplus E_2$ et $u_1 \in \mathscr{L}(E_1)$ et $u_2 \in \mathscr{L}(E_2)$. Alors E_1 et E_2 sont stables par l'unique endomorphisme u de E vérifiant : $u_{/E_1} = u_1$ et $u_{/E_2} = u_2$. **27**

Exercice6: Soit $u: \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ définie par : $u(P) = X^2P' - 6XP$. Montrer que u induit un endomorphisme sur $\mathbb{R}_6[X]$.

A savoir démontrer : *démo* Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ $\lambda \in K$. Alors, $f - \lambda id_E \in \mathscr{L}(E)$ et $Ker(f - \lambda id_E) = \{\vec{x} \in E / f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}\}$ et $Ker(f - \lambda id_E)$ est stable par f. L'endomorphisme f_λ de $Ker(f - \lambda id_E)$ induit par f est l'homothétie de rapport λ. **28**

Caractérisation de l'injectivité par le noyau *démo*

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.Alors, f injective $\Leftrightarrow Ker(f) = \{\overrightarrow{0_E}\}$. **29**

Exemple7: $f: (P \mapsto P(X+1) - P(X))$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}$[X] non injectif car $1 \in Ker(f)$ donc $Ker(f) \neq \{O\}$. Rappel : $Ker(f) = \mathbb{R}_0[X]$.

Exercice8 : Montrons que l'endomorphisme $f : (P \mapsto \alpha P - XP')$ de $\mathbb{R}$[X] est injectif sietssi $\alpha \notin \mathbb{N}$.

Injectivité et liberté *démo*

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors,

1) Si f est injective alors pour toute famille libre $(\overrightarrow{u_i})_{i\in[\![1,n]\!]}$ de vecteurs de E, $\left(f(\overrightarrow{u_i})\right)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une famille libre de vecteurs de F .
2) Si E de dimension finie et admet une base $(\overrightarrow{e_i})_{i\in[\![1,n]\!]}$ alors

f est injective $\Leftrightarrow$ $\left(f(\overrightarrow{e_i})\right)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une famille libre.

$\Leftrightarrow rg(f) = dimE$. **30**

Exercice9: Montrons que l'endomorphisme $f : (P \mapsto P + P')$ de $\mathbb{R}_n[X]$ est injectif.

Caractérisation de la surjectivité S *démo* oit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

f surjective **sietssi** $Imf = F$. **31**

Exercice10 : Soit $u: C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mapsto C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ définie par : $\forall f \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}), u(f)$ est la primitive de f qui s'annule en 0. Montrer que u est injectif mais n'est pas surjective de $C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ sur $C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Surjectivité et genèse *démo* Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

1) Soit $(\vec{e_i})_{i\in I}$ est une famille génératrice de E.

f surjective de E sur F **sietssi** $(f(\vec{e}_i))_{i\in I}$ est une famille génératrice de F.

2) Supposons F de dimension finie .
f est surjective de E sur F **sietssi** $rg(f) = \dim(F)$. **32**

Exercice: Montrer que $f: (x(x,y,z) \mapsto (x+y, 2z-x))$est de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ surjective mais non injective. Donner une base de $Ker(f)$.

Caractérisat° d'un isomorphisme *démo* . Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

1. f est un isomorphisme de E sur F **sietssi** $\begin{cases} Kerf = \{\overrightarrow{0_E}\} \\ Imf = F \end{cases}$.

2. Supposons que E ou F soit de dimension finie et E admette une base $(\vec{e}_i)_{i\in I}$. Alors,
f est un isomorphisme de E sur F
sietssi $\left(f(\vec{e}_i)\right)_{i\in I}$ est base de F.
sietssi $\dim(E) = rg(f) = dim(F) < +\infty$. **33**

Exercice11 : Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, il existe un unique $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que : $P = \sum_{k=0}^{n} Q^{(k)}$.

Construire ou justifier une base Si f est un isomorphisme de E sur F alors f envoie une base de E sur une base de F et f^{-1}envoie une base de F sur une base de E. **34**

Exercice12 : Soit $a_0, a_1, \dots, a_n$ des réels distincts. On pose $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $X_k = (a_0{}^k, a_1{}^k, \dots, a_n{}^k) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

1. En utilisant la base de Lagrange associée à $a_0, a_1, \dots, a_n$, montrer que $f: \begin{pmatrix} \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}^{n+1} \\ P \mapsto (P(a_0), P(a_1), \dots, P(a_n)) \end{pmatrix}$est un isomorphisme.
2. En déduire que la famille $(X_k)_{k=0;;n}$est libre dans $\mathbb{R}^{n+1}$et retrouver que $V(a_0, a_1, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & 1 \\ a_1 & a_2 & & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & & a_n^n \end{pmatrix}$est inversible.

Dimension et isomorphisme *démo* **35**

1. Si E et F sont isomorphes alors $dim(E) = dim(F)$ (finie ou infinie).
2. Si $dimE = dimF < +\infty$ alors E et F sont isomorphes. (faux si $dimE = dimF = +\infty$).
3. si $\dim(E) > \dim(F)$ alors il n'existe aucune application linéaire injective de E vers F .
4. si $\dim(E) < \dim(F)$ alors il n'existe aucune application linéaire surjective de E sur F .

Exercice13: Soit E le ss-e-v de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ constitué des suites p-périodiques. Soit $h: \begin{pmatrix} E \to \mathbb{C}^p \\ u \mapsto (u_0, u_1, \dots, u_{p-1}) \end{pmatrix}$. Montrons que $h \in Isom(E, \mathbb{C}^p)$. En déduire $dimE$.

Caractérisation des isomorphismes en dim finie : *démo*

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ **Si E et F sont de même dimension finie**
alors : f est un isomorphisme de E sur F
$\Leftrightarrow f$ injective
$\Leftrightarrow f$ surjective de E sur F
$\Leftrightarrow rgf = dimE$ $(= dimF)$ **36**

Exercice14 : Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\varphi(P) = (1 - nX)P(X) + X^2P'(X)$. Montrer que $\varphi_n \in GL(\mathbb{R}_n[X])$.

Théorème du rang *démo* . Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.
Si G est un supplémentaire de $Ker(f)$ dans E alors Imf et G sont isomorphes.
En conséquence : Si E est de dimension finie alors
$$\boldsymbol{rg(f) + dim(Kerf) = dim(E)}$$ **37**

Dimension d'une image directe ou réciproque .

Soit E et F deux K-e-v de même dimension.
1) Si f est un isomorphisme de E sur F et H est un ss-e-v de E alors $f(H)$ et H ont la même dimension .
2) Si f est un isomorphisme de E sur F et G est un ss-e-v de F alors $f^{-1}\langle G\rangle = f^{-1}(G)$ et $f^{-1}(G)$ et G ont la même dimension . **38**

Propriété du rang .

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$ et $h \in \mathscr{L}(G,E)$
1. Si g est un isomorphisme de F sur G alors $rg(g \circ f) = rg(f)$.
2. Si h est un isomorphisme de G sur E alors $rg(f \circ h) = rg(f)$.
3. $rg(g \circ f) \leq \min(rg(f), rg(g))$. *Démo* **39**

RQUE : Autrement dit , le rang est invariant par composition à droite ou à gauche par un isomorphisme.
ce résultat rappelle le résultat sur les matrices : le rang d'une matrice est inchangé lorsqu'on la multiplie par une matrice inversible.

Equations linéaires *démo* Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $\vec{b} \in F$.

Notons (e) l'équation linéaire $f(\vec{x}) = \vec{b}$ d'inconnue $\vec{x} \in E$ et (eh) l'équation $f(\vec{x}) = \vec{0}_F$ d'inconnue $\vec{x} \in E$, l'équation homogène associée à (e). Alors, $Ker(f)$ est l'ensemble des solutions de (eh).

Ou bien, $\vec{b} \in Im(f)$. Alors (e) admet une solution particulière $\vec{v}$et les solutions de (e) sont les vecteurs $\vec{v} + \vec{h}$ tels que $\vec{h} \in Ker(f)$

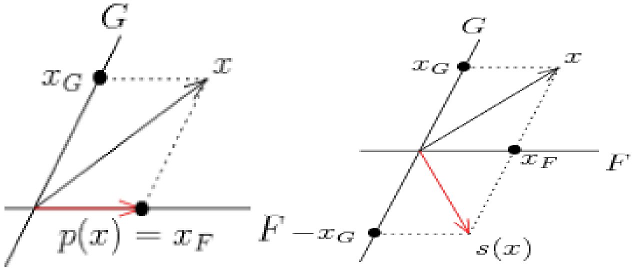
Ou bien, $\vec{b} \notin Im(f)$. Alors (e) n'a pas de solution. **40**

Application à la preuve du théorème des suites récurrentes linéaires d'ordre 2. (Cf annexe) **41**

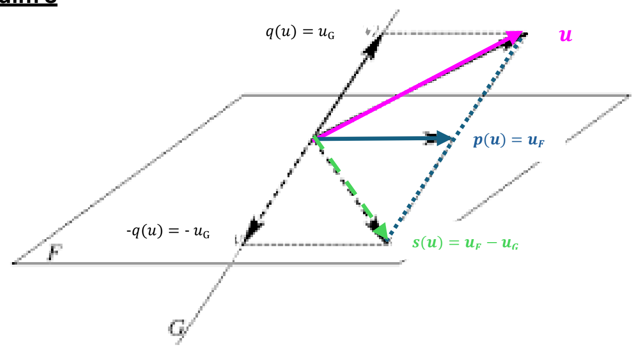
Projection et symétrie vectoriels : Soient E un **K**-e-v et **F et G** deux ss e v de E tels que $F \oplus G = \mathbf{E}$.
Pour chaque $\vec{x} \in E$, $\exists\,!\,(\overrightarrow{x_F}, \overrightarrow{x_G}) \in F \times G \;/\; \vec{x} = \overrightarrow{x_F} + \overrightarrow{x_G}$; on pose alors $p(\vec{x}) = \overrightarrow{x_F}$ et $q(\vec{x}) = \overrightarrow{x_G}$ et $s(x) = \overrightarrow{x_F} - \overrightarrow{x_G}$
L'application p ainsi définie est appelée la **projection vectorielle** sur F parallèlement à G (ou de direction G) et q est la projection sur G de direction F. Les projections p et q sont dites associées à la somme directe $F \oplus G = E$.
L'application s est appelée la **symétrie vectorielle** par rapport à F parallèlement à G (ou de direction G) .
$p(\vec{x})$ est le **projeté** de $\vec{x}$ sur F parallèlement à G et $q(\vec{x})$ est le projeté de $\vec{x}$ sur G parallèlement à F.
$s(\vec{x})$ est le **symétrique** de $\vec{x}$ sur F parallèlement à G
L'espace F sur lequel p projette et l'espace G parallèlement auquel p projette sont les **éléments caractéristiques** de p , de q et de s . **42**

Exemple15 : $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $h(P) = P(0) + P'(0)X$.
Alors, h est la projection sur $\mathbb{R}_1[X]$ et parallèlement à $G = \text{vect}(X^k)_{k\geq 2} = \{P \in \mathbb{R}[X] / P(0) = P'(0) = 0\}$.

En dim 2



En dim 3



Propriétés des projections et symétries *démo*

Soient E un **K**-e-v et $\boldsymbol{F}$ **et G** deux ss e v de **E** supplémentaires dans **E** et $\boldsymbol{p}$ **et** $\boldsymbol{q}$ les projections associées à la somme et **s** la symétrie vectorielle par rapport à $\boldsymbol{F}$ parallèlement à G directe $\mathbf{F} \oplus \mathbf{G} = \mathbf{E}$: $\mathbf{p}$ projection sur $\boldsymbol{F}$ parallèlement à **G** et **g** projection sur **G** parallèlement à $\boldsymbol{F}$Alors,

1. $\forall \vec{x} \in E, \vec{x} = p(\vec{x}) + q(\vec{x})$ est <u>la</u> décomposition de $\vec{x}$ comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.
2. $p + q = Id_E$ et $s = p - q = 2p - Id_E = Id_E - 2q$.
3. p , q et s sont des endomorphismes de E. p est l'unique endomorphisme de E tel que $p_{/F} = Id_F$ et $p_{/G} = 0_{\mathscr{L}(G)}$ et s est l'unique endomorphisme de E tel que $s_{/F} = Id_F$ et $s_{/G} = -Id_G$
4. $q \circ p = 0$ (et $p \circ q = 0$)
5. $p^2 = pop = p$ (et $q^2 = q \circ q = q$) et $s \circ s = Id_E$
6. $F = Im(p) = Ker\ (p - Id) = \{vecteurs\ fixes\ par\ p\} = Ker(q)$ et $G = Ker(p) = Im(q)$
7. $F = Ker\ (s - Id_E) = \{vecteur\ fixes\ par\ s\}$ et $G = Ker(s + Id_E) = \{\vec{x} \in E / s(\vec{x}) = -\vec{x}\}$
8. $Im(p) \oplus Ker(p) = E$ (et $Imq \oplus Kerq = E$) et $Ker\ (s - Id_E) \oplus Ker(s + Id_E) = E$

NB : si p est une projection alors p est la projection sur Imp et parallèlement à $Kerp$: Imp et $Kerp$ sont les symétrie alors s est la projection par rapport à $Ker\ (s - Id_E)$ et parallèlement à $Ker\ (s + Id_E)$: $Ker\ (s - Id_E)$et $Ker\ (s + Id_E)$ sont les éléments caractéristiques de la symétrie s. **43**

Caractérisation d'une projection ou d'une symétrie *démo*

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Alors,

1. f est une projection (0)
$\Leftrightarrow$ f est la projection sur $Im(f)$ parallèlement à $Ker(f)$ (1)
$\Leftrightarrow fof = f$ (2)
$\Leftrightarrow Imf \oplus Kerf = E$ et $\forall \vec{y} \in Imf, f(\vec{y}) = \vec{y}$ (3)

2. f est une symétrie (0)
$\Leftrightarrow f$ est la symétrie par rapport à $Ker\ (f - Id_E)$ parallèlement à $Ker(f + Id_E)$ (1)
$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(f + id_E)$ est une projection (2)
$\Leftrightarrow fof = Id_E$ (3)
$\Leftrightarrow Ker\ (f - Id_E) \oplus Ker(f + Id_E) = E$. (4) **44**

Exercice16 : Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\varphi(P) = P(-X)$.
Reconnaitre φ et décrire par des bases ses éléments caractéristiques.

Rappel : Une forme linéaire de E est une application linéaire de E dans K. E^*est l'ensemble des formes linéaires sur E. **45**

Hyperplan Un hyperplan de E est un ss-e-v de E lorsque H admet une droite vectorielle comme supplémentaire dans E. **46**

Caractérisation d'un hyperplan *démo*

Soit H un ss-e-v de E.
H est hyperplan de E
$\Leftrightarrow$ tout vecteur $\vec{u} \in E \backslash H$ vérifie : $vect(\vec{u}) \oplus H = E$
$\Leftrightarrow H$ est le noyau d'une forme linéaire non nulle. **47**

Equation d'un hyperplan en dim finie *démo*

On suppose que E est de dimension finie et $B = (\vec{e}_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est une base de E.
H est un hyperplan de E
$\Leftrightarrow dimH = (dimE) - 1$
$\Leftrightarrow$il existe $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des scalaires non tous nuls tels que $H = \{\sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i \;/\; \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i a_i = 0}_{\substack{équation \\ de\ H\ dans\ B.}}\}$. **48**

Exemple17 : Soit $H = \text{vect}((1,2,3,0), (1,1,0,3), (-1,1,1,-1))$. Jusutifer que H est un hyperplan de $\mathbb{R}^4$. Trouver une forme linéaire de $\mathbb{R}^4$ dont H est le noyau et une équation de H.

41**ANNEXE : Démontrons les deux résultats suivants admis dans le chapitre « Suites particulières ».**

1) S'il existe une suite t telle que : $\forall n\in\mathbb{N}, t_{n+2}+at_{n+1}+bt_n=v_n$ alors $E=\{v+h/h\in \text{Ker }(\varphi)\}$ i.e. les suites réelles u vérifiant $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+2}+au_{n+1}+bu_n=v_n$ sont les suites sommes de t et d'une suite élément de H.
2) $H=\{\alpha(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}+\beta\,(r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}/(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\}\; si\; \Delta_{(e.c)}>0$ et $r_1\; et\; r_2\; sol°\; distinctes\; de\; (e.c)$. .

$H=\{(\alpha+\beta n)\,(r_0^n)_{n\in\mathbb{N}}/(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\}\; si\; \Delta_{(e.c)}=0$ et $r_0\; sol°\; de\; (e.c)$..

$H=\{(\alpha\cos(n\theta)+\beta\,\sin(n\theta))\rho^n/(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\}\; si\; \Delta_{(e.c)}<0\; et\; r_1=\rho e^{i\theta}\; sol°\; de\; (e.c)$.

1) Soit φ: $\begin{pmatrix}\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\to\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\\ u\mapsto(u_{n+2}+au_{n+1}+bu_n)_{n\in\mathbb{N}}\end{pmatrix}$. Alors E est l'ensemble des suites réelles u solutions de $\varphi(u)=v$ et $H=Ker(\varphi)$.

Montrons que $\varphi\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$.

$\forall(u,z)\in(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})^2,\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2,\varphi(\alpha u+\beta z)$

$$\begin{aligned}&=\big((\alpha u_{n+2}+\beta z_{n+2})+a(\alpha u_{n+1}+\beta z_{n+1})+b(\alpha u_n+\beta z_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}\\&=(\alpha u_{n+2}+a\alpha u_{n+1}+b\alpha u_n+\beta z_{n+2}+a\beta z_{n+1}+b\beta z_n)_{n\in\mathbb{N}}\\&=(\alpha u_{n+2}+a\alpha u_{n+1}+b\alpha u_n)_{n\in\mathbb{N}}+(\beta z_{n+2}+a\beta z_{n+1}+b\beta z_n)_{n\in\mathbb{N}}\\&=\alpha(u_{n+2}+au_{n+1}+bu_n)_{n\in\mathbb{N}}+\beta\,(z_{n+2}+az_{n+1}+bz_n)_{n\in\mathbb{N}}\\&=\alpha\varphi(u)+\beta\varphi(z)\end{aligned}$$

Donc, $\varphi\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$. Ainsi, E est l'ensemble des solutions d'une équation linéaire. D'après le théorème précédent, on peut donc affirmer que : si E est non vide i.e. il existe une suite t telle que : $\forall n\in\mathbb{N}, t_{n+2}+at_{n+1}+bt_n=v_n$ alors $E=\{v+h/h\in\text{Ker }(\varphi)\}$ i.e. les suites réelles u vérifiant $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+2}+au_{n+1}+bu_n=v_n$ sont les suites sommes de t et d'une suite élément de H.

2) Donnons une base et la dimension de H.
   - Tout d'abord H est un ss-e-v de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\; car\; H\subset\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et la suite nulle est élément de H et $si\; h\; et\; g$ sont deux suites de H et x et y deux réels alors $\forall n\in\mathbb{N}, (x\,h_{n+2}+yg_{n+2})+a(xh_{n+1}+yg_{n+1})+b(xh_n+yg_n)=x\,(\underbrace{h_{n+2}+ah_{n+1}+bh_n}_{=0})+y(\underbrace{h_{n+2}+ag_{n+1}+bg_n}_{=0})=0$; donc $xh+yg\in H$.
   - Pour trouver la dimension et une base on va construire un isomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur H.

Soit $\Gamma:H\to\mathbb{R}^2$définie par : $\Gamma(h)=(h_0,h_1)$.

Γ est bien définie et linéaire car $si\; h\; et\; g$ sont deux suites de H et x et y deux réels alors $\Gamma(xh+yg)=(xh_0+yg_0,xh_1+yg_1)=(xh_0,xh_1)+(yg_0,yg_1)=x(h_0,h_1)+y(g_0,g_1)=x\Gamma(h)+y\Gamma(g)$.

Γ est bijecti... $\mathbb{R}^2, il\; exist$... $a,h_1=b\; et$...

Donc, les suites $(\rho^n\cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}et\;(\rho^n\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ sont éléments de H.

Ainsi,Γ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur H. Donc, $dimH=dim\mathbb{R}^2=2$. Donc, une base de H est une famille libre formée de deux vecteurs de H.

- Cherchons les suites géométriques complexes NON NULLES vérifiant $\forall n\in\mathbb{N}, h_{n+2}+ah_{n+1}+bh_n=0$. Soit $r\in\mathbb{C}^*$.

$$(r^n)_{n\in\mathbb{N}}\in H\Leftrightarrow\forall n\in\mathbb{N}, r^{n+2}+ar^{n+1}+br^n=0\Leftrightarrow\forall n\in\mathbb{N},(r^2+ar+b)\underbrace{r^n}_{\neq0\; car\; r\neq0}=0\Leftrightarrow r^2+ar+b=0$$

Ainsi, $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}\in H\Leftrightarrow r\;\; sol°de\; ax^2+bx+c=0$.

- Posons $(e.c)$: $ax^2+bx+c=0$.

Ou bien $\Delta_{(e.c)}>0$. Alors $(e.c)$ a deux solutions réelles distinctes : $r_1\; et\; r_2$ et alors les suites géométriques $(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}\; et\; (r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$sont éléments de H . Comme $r_1\neq r_2$, $((r_1^n)_{n\in\mathbb{N}},(r_2^n)_{n\in\mathbb{N}})$ est libre et ainsi, $((r_1^n)_{n\in\mathbb{N}},(r_2^n)_{n\in\mathbb{N}})$ est une base de H. En particulier, les suites éléments de H sont toutes les $c.l.$ de $(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}\; et\; (r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Ou bien $\Delta_{(e.c)}=0$. Alors $(e.c)$ a une seule solution : le réel $r_0=-\frac{b}{2a}$ et H ne contient qu'une seule suite géométrique non nulle : $(r_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrons que $(nr_0^n)_{n\in\mathbb{N}}\in H$. $\forall n\in\mathbb{N}$, $(n+2){r_0}^{n+2}+a(n+1){r_0}^{n+1}+bn{r_0}^n=(n+2){r_0}^{n+2}+a(n+1){r_0}^{n+1}+bn{r_0}^n=n{r_0}^n\Big[\underbrace{r_0^2+ar_0+b}_{=0}\Big]+{r_0}^n\Big[\underbrace{2ar_0+b}_{=0}\Big]=0$.

Donc, $(nr_0^n)_{n\in\mathbb{N}}\in H$.

Montrons que $((nr_0^n)_{n\in\mathbb{N}},(r_0^n)_{n\in\mathbb{N}})$ est libre.

Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$. $\alpha(nr_0^n)_{n\in\mathbb{N}}+\beta(r_0^n)_{n\in\mathbb{N}}=0\Leftrightarrow\forall n,\alpha nr_0^n+\beta r_0^n=0\underbrace{\Rightarrow}_{pour\; n=0\; puis\; 1}\beta=0\;\; et\;(\alpha+\beta)\underbrace{r_0}_{\neq0}=0\Rightarrow\alpha=\beta=0$.

Ainsi, $((nr_0^n)_{n\in\mathbb{N}},(r_0^n)_{n\in\mathbb{N}})$ est libre et maximale dans H donc est une base de H. En particulier, les suites éléments de H sont toutes les $c.l.$ de $(r_0^n)_{n\in\mathbb{N}}\; et\; (nr_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Ou bien $\Delta_{(e.c)}<0$. Alors $(e.c)$ a deux solutions complexes conjuguées et non réelles : $r_1\; et\; r_2$ et alors les suites géométriques $(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}\; et\; (r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$sont complexes et vérifient : $\forall n\in\mathbb{N}, r^{n+2}+ar^{n+1}+br^n=0$. Posons, $r_1=\rho e^{i\theta}$. On a donc,

$\in\mathbb{N},\rho^{n+2}e^{i(n+2)\theta}+a\rho^{n+1}e^{i(n+1)\theta}+b\rho^ne^{in\theta}=0$ i.e.

$\in\mathbb{N},\rho^{n+2}(\cos((n+2)\theta)+isin((n+2)\theta))+a\rho^{n+1}(\cos((n+1)\theta)+isin((n+1)\theta)))+b\rho^n(\cos(n\theta)+isin(n\theta))=0+i0$. Donc, par unicité des parties réelle et imaginaire du complexe nul,

$\forall n\in\mathbb{N},\rho^{n+2}\cos((n+2)\theta)+a\rho^{n+1}\cos((n+1)\theta)+b\rho^n\cos(n\theta)=0$ et

$\rho^{n+2}sin((n+2)\theta)+a\rho^{n+1}sin((n+1)\theta)+$
43$b\rho^nsin(n\theta)=0$.

Montrons que $((\rho^n\cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}},(\rho^n\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}})$est libre.

Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$. $\alpha(\rho^n\cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}+\beta(\rho^n\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}=0\Leftrightarrow\forall n,\alpha\rho^n\cos(n\theta)+\beta\rho^n\sin(n\theta)=0$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{pour\; n=0\; puis\; 1}\quad\alpha=0\;\; et\;\left(\alpha\cos(\theta)+\beta\;\underbrace{\sin(\theta)}_{\neq0\; car\; r_1\notin\mathbb{R}}\right)\underbrace{\rho}_{\neq0car\; r_1\notin\mathbb{R}}=0\Rightarrow\alpha=\beta=0.$$

Ainsi, $((\rho^n\cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}},(\rho^n\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}})$est une famille libre et maximale dans H et est donc une base de H. En particulier, les suites éléments de H sont toutes les $c.l.$ de $(\rho^n\cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}\; et(\rho^n\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$.

<u>CCL :</u> $H=\{\alpha(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}+\beta\,(r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}/(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\}\; si\; \Delta_{(e.c)}>0$ et $r_1\; et\; r_2\; sol°\; distinctes\; de\; (e.c)$. .

$H=\{(\alpha+\beta n)\,(r_0^n)_{n\in\mathbb{N}}/(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\}\; si\; \Delta_{(e.c)}=0$ et $r_0\; sol°\; de\; (e.c)$..

$H=\{(\alpha\cos(n\theta)+\beta\,\sin(n\theta))\rho^n/(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\}\; si\; \Delta_{(e.c)}<0\; et\; r_1=\rho e^{i\theta}\; sol°\; de\; (e.c)$.

Je vais trouver la dimension de H <u>sans</u> et pour trouver une base de H en utilisant un isomorphisme.