

TD 20

Applications linéaires.

Ex 1 Sont-elles linéaires ? Si oui, trouver une base du noyau et une base de l'image.

1. f définie sur $\mathbb{R}[X]$ par : $f(P) = P(2)P'(1)$.
2. u définie sur $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ par : $u(f) = f' + 2f$.
3. u définie sur $M_n(\mathbb{C})$ par : $u(M) = \det(M)$.
4. Soit $D = \text{diag}(a, b)$ où a et b complexes fixés et u définie sur $M_2(\mathbb{C})$ par : $u(M) = DM^T$.
5. Ψ définie sur \mathbb{R}^2 par : $\Psi((x, y)) = (x - 3y, 2x^2 - y)$.
6. f définie sur $\mathbb{R}[X]$ par : $f(P) = P + XP' + 1$.
7. f définie sur $\mathbb{R}[X]$ par : $f(P) = P + P'(1)X$.
8. u définie sur $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ par : $u(f) = 2f(0)f''$.
9. Ψ définie sur \mathbb{R}^4 par : $\Psi((x, y, z, t)) = 4y - x + t$.

Réponses : N,O,N,O,N,N,O,N,O

Ex 2 Montrer que f est linéaire et déterminer $\text{Ker}f$, $\text{Im}f$ et $\text{rg}f$. f est-elle injective ? surjective ? f est-elle un automorphisme ? un isomorphisme ?

1. Soit $\varphi : C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ par : $\varphi(f) = g$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \int_0^x tf(t)dt$.
2. Soit $E = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / u \text{ convergente}\}$ et φ définie sur E par : $\varphi((u_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
3. Soit φ définie sur $\mathbb{R}[X]$ par : $\varphi(P) = P'(2) + 4P^{(3)}(2)$.
4. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et φ application définie sur $M_2(\mathbb{R})$ par : $\varphi(X) = AX - XA$.
5. Soit φ application définie sur $M_n(\mathbb{R})$ par : $\varphi(M) = \text{tr}(M)$.
6. Soit φ application définie sur $M_3(\mathbb{R})$ par : $\varphi(M) = M - \text{tr}(M)I$.
7. Soit φ application définie sur $M_n(\mathbb{R})$ par : $\varphi(M) = M - M^T$.

Ex 3 1. Soit E un K -e-v de dimension 3 rapporté à une base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ telle que :

$$u(\vec{e}_1) = 4\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 - 4\vec{e}_3, u(\vec{e}_2) = -\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \text{ et } u(\vec{e}_3) = 5\vec{e}_1 - \vec{e}_2 - 5\vec{e}_3.$$

- a. Déterminer le rang de u .
 - b. $\text{Ker}(u)$ et $\text{Im}(u)$ sont ils supplémentaires dans E ?
 - c. $\text{Ker}(u^2)$ et $\text{Im}(u^2)$ sont ils supplémentaires dans E ?
2. Soit φ l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 canoniquement associé à la matrice carrée d'ordre 3 dont tous les coefficients valent 1.
- a. Montrer que $\text{ker}(f) \oplus \text{Im}(f) = \mathbb{R}^3$.
 - b. Soit p la projection sur $\text{Ker}f$ et parallèlement à $\text{Im}f$ et q la projection associée. Déterminer $p(x, y, z)$ et $q(x, y, z)$.

Ex 4

1. Déterminer l'unique forme linéaire sur \mathbb{R}^3 telle que : $f((1,1,1)) = 0, f((2,0,1)) = 1$ et $f((1,2,3)) = 4$.
3. Trouver un endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont le noyau est $\text{vect}((1,0,0), (1,1,1))$.
4. Soit $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x = y = z = t\}$. Existe-t-il des applications linéaires de \mathbb{R}^4 dans \mathbb{R}^2 dont le noyau est H ?

Ex 5 Soit u définie sur $\mathbb{R}_3[X]$ par : $u(P) = P + (1 - X)P'$.

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Montrer que $\text{Im}(u)$ et $\text{Ker}(u)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$.
3. Calculer $u^2(P)$. Montrer que $\text{Im}(u) = \text{Im}(u^2)$.
4. Déterminer $s(A + bX + cX^2 + dX^3)$ où s est la symétrie par rapport à $\text{Im}(u)$ et parallèlement à $\text{Ker}(u)$.

Ex 6 Soit u définie par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], u(P) = P(X + 1) + P(X - 1) - 2P(X)$.

1. Montrer que $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$.
2. Déterminer une base de $\text{Im}(u)$ et une base de $\text{Ker}(u)$.
3. Soit $Q \in \text{Im}(u)$. Démontrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que : $u(P) = Q$ et $P(0) = P'(0) = 0$.

Ex 7 Pour tout polynôme P , $\varphi(P)(X) = (X^2 - 1)P''(X) - 2XP'(X)$.

1. Montrer que l'on définit ainsi un endomorphisme φ de $\mathbb{R}[X]$.
2. Pour tout P dans $\mathbb{R}[X]$, déterminer le degré de $\varphi(P)$ en fonction de celui de P .
3. En déduire que φ n'est ni injective ni surjective de $\mathbb{R}[X]$ sur $\mathbb{R}[X]$.
4. Justifier que φ induit un endomorphisme sur $\mathbb{R}_2[X]$ noté g . g est-il un automorphisme ?
5. Déterminer l'image et le noyau de g .
6. Montrer que $g - \text{lid}$ est un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$, sauf pour un nombre fini de valeurs de λ que l'on précisera (comment appelle-t-on ces valeurs ?).
7. Pour ces valeurs particulières, déterminer le noyau de $g - \text{lid}$.

Ex 8 Soit $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E

1. Montrer que $\varphi: E^* \rightarrow K^n$ définie par : $\varphi(f) = (f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_n))$ est un isomorphisme. Qu'en déduit-on sur E^* ?
2. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ e_k^* l'application définie sur E par : $e_k^*(\vec{x}) =$ la composante de \vec{x} selon \vec{e}_k dans B .
Montrer que $(e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$ est une base de E^* .

3. Ici $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$. On considère n réels a_0, \dots, a_{n-1} et f la forme linéaire sur E définie par : $f(P) = \int_{-1}^1 \frac{P(t)}{1+\cos^2(t)} dt$.

Montrer que $\exists (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^n / \forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], f(P) = \lambda_0 P(a_0) + \lambda_1 P(a_1) + \dots + \lambda_{n-1} P(a_{n-1})$.

Ex 9 Soit F et G deux ss-e-v de E . Soit $\varphi: F \times G \rightarrow E$ telle que : $\varphi((\vec{x}, \vec{y})) = \vec{x} + \vec{y}$. Montrer que φ est linéaire. Décrire son noyau et son image. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que φ soit injective puis surjective puis bijective.

Ex 10 Soit $f \in L(E)$. Soit a et b deux scalaires distincts.

1. Montrer que : $\text{Ker} f = \text{Ker} f^2 \Leftrightarrow \text{Im} f \cap \text{Ker} f = \{\vec{0}\}$
2. Montrer que : $\text{Im} f^2 = \text{Im} f \Leftrightarrow \text{Im} f + \text{Ker} f = E$.
3. Démontrer que $\text{Ker}(f - a \cdot \text{id})$ et $\text{Ker}(f - b \cdot \text{id})$ sont stables par f et en somme directe.

Ex 11 Soit $f \in L(E)$ tel qu'il existe un entier naturel p tel que $f^{p-1} \neq 0$ et $f^p = 0$.

1. Soit $\vec{x} \in E$ tel que $f^{p-1}(\vec{x}) \neq \vec{0}$. Montrer que : $B = (\vec{x}, f(\vec{x}), f^2(\vec{x}), \dots, f^{p-1}(\vec{x}))$ est libre.
2. Si E est de dimension finie n , comparer n et p . Que dire de B si $p = n$?

Ex 12 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^2 + 6f - 7\text{id}_E = 0$

1. Montrer que f est un automorphisme de E et déterminer f^{-1} en fonction de f et id .
2. Montrer que : $(f - \text{id}) \circ (f + 7\text{id}) = 0$. En déduire que $\text{Im}(f - \text{id}) \subset \text{Ker}(f + 7\text{id})$ et $\text{Im}(f + 7\text{id}) \subset \text{Ker}(f - \text{id})$.
3. Démontrer enfin que $\text{Ker}(f + 7\text{id}) \oplus \text{Ker}(f - \text{id}) = E$.
4. Montrer que $\text{Ker}(f + 7\text{id})$ et $\text{Ker}(f - \text{id})$ sont stables par f . On note h et g les endomorphismes induits par f sur respectivement $\text{Ker}(f + 7\text{id})$ et $\text{Ker}(f - \text{id})$. Reconnaitre g et h .
5. Soit p la projection sur $\text{Ker}(f + 7\text{id})$ et parallèlement à $\text{Ker}(f - \text{id})$ et q l'autre projection associée.
 - a. Montrer que $f = -7p + q$.
 - b. En déduire que $f^n = (-7)^n p + q$.

Ex 13 Soit f un endomorphisme d'un K-e-v E tel que $f^3 = f$. Montrer que $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont supplémentaires dans E .

Ex 14 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que si F et G sont deux ss-e-v de E stables par f alors $F + G$ et $F \cap G$ sont stables par f .
2. Montrer que si g est un endomorphisme de E tel que $f \circ g = g \circ f$ alors $\text{Ker}(g)$ et $\text{Im}(g)$ sont stables par f .

Ex 15 Soit $f \in E^*$ telle que f non nulle.

1. Montrer que f est surjective.
2. Soit $\vec{a} \in E \setminus \text{Ker}(f)$. Montrer que $\text{Ker}(f) \oplus \text{vect}(\vec{a}) = E$. Que peut-on alors dire de $\text{Ker}(f)$?

Ex 16 Soit $(u, v) \in L(E)^2$ telle que : $v \circ u = \text{id}_E$. Montrer que $E = \text{Ker}(v) \oplus \text{Im}(u)$.

Ex 17 Soit u et v deux endomorphismes d'un K-e-v E de dimension finie n .

1. Soit $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E . Montrer que : $u \neq 0 \Leftrightarrow \exists i_0 \in \{1, \dots, n\} / u(\vec{e}_{i_0}) \neq 0$.
2. Montrer que :
 - $rg(u + v) \leq rg(u) + rg(v)$.
 - $|rg(u) - rg(v)| \leq rg(u - v)$.

Ex 18 Soit E de dimension finie n . Soit $(u, v) \in L(E)^2$.

1. On suppose ici que : $E = \text{Im}(u) + \text{Im}(v) = \text{Ker}(u) + \text{Ker}(v)$. Montrer que ces deux sommes sont directes.
2. Montrer que $\text{Im}(u) = \text{Ker}(u) \Leftrightarrow u^2 = 0$ et $2rg(u) = n$.
3. On suppose ici que $u^2 + 2u = 0$. Montrer que $\text{Ker}(u)$ et $\text{Im}(u)$ sont supplémentaires dans E et que u induit un automorphisme sur $\text{Im}(u)$.

4. On suppose que $rg(u^2) = rg(u)$. Montrer que :
$$\begin{cases} \text{Im}(u^2) = \text{Im}(u) \\ \text{Ker}(u^2) = \text{Ker}(u) \\ \text{Im}(u) \oplus \text{Ker}(u) = E \end{cases}$$

Ex 19 Soit E de dimension finie n .

- a. Montrer que les suites $(\text{Im}(u^k))_{k \in \mathbb{N}}$ et $(\text{Ker}(u^k))_{k \in \mathbb{N}}$ sont stationnaires.
- b. Soit p le plus petit entier tel que $\text{Im}(u^p) = \text{Im}(u^{p+1})$. Montrer que $\forall k \geq p, \text{Im}(u^k) = \text{Im}(u^p)$ et $\text{Ker}(u^k) = \text{Ker}(u^p)$.
- c. Montrer que $\text{Im}(u^p) \oplus \text{Ker}(u^p) = E$.

Ex 20 Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel. On étudie sur des cas particuliers les solutions de l'équation

(eq) : $(f + id_E)^{2n} = id$ où $f \in L(E)$ est l'inconnue.

Déterminer les homothéties vectorielles sur E qui sont solutions de (eq)

Soit s une symétrie. Exprimer $(s + id)^{2n} - id$ fonction de s et id_E . En déduire les symétries solutions de (eq).

Déterminer les projections vectorielles de E solutions de (eq).

Ex 21 Soit E un K -e-v et u un vecteur de E et p un projecteur et s une involution dans E .

1. Résoudre l'équation $x + p(x) = u$ d'inconnue x élément de E .
2. Résoudre l'équation $x + s(x) = u$ d'inconnue x élément de E .

Ex 22 Soit p et q deux projecteurs d'un K -e-v E pas forcément associés tels que $Im(p) = Im(q)$ et $q \circ p = p \circ q$

Montrer que $p = q$.

Ex 23 Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ et $f : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ telle que : $f(P) = (P(0), P'(0), \dots, P^{(n)}(0))$. Montrer que f est un isomorphisme et préciser f^{-1} .

Ex 24 Soit f et g deux endomorphismes d'un K -e-v E tels que : $f \circ g = id_E$. Montrer que $Ker(f) = Ker(g \circ f)$ et $Im(f) = Im(g \circ f)$.

Quelques problèmes :

Ex 25 On note \mathcal{E} le \mathbb{R} -e-v des fonctions continues sur \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{R} .

Pour tout $f \in \mathcal{E}$, on note $U(f)$, l'application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, U(f)(x) = \int_{x-1}^x f(t) dt$.

1. Soit $f \in \mathcal{E}$, T -périodique. Montrer que $\forall a \in \mathbb{R}, \int_a^{a+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt$.
2. Soit f une fonction dérivable sur \mathbb{R} .
 - a) Montrer que si f est T -périodique alors f' l'est aussi.
 - b) Justifier que la réciproque est fautive.
3. Montrer que pour tout $f \in \mathcal{E}$, $U(f)$ est de classe C^1 sur \mathbb{R} et calculer sa dérivée.
4. Montrer que $U : \begin{pmatrix} \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} \\ f \mapsto U(f) \end{pmatrix}$ est un endomorphisme de \mathcal{E} .
5. Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On note E_n , l'ensemble des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n et $\mathcal{B}_n = (f_0, f_1, f_2, \dots, f_n)$ où $f_k : (t \mapsto t^k)$ est la base canonique de E_n .
 - 5.1 Montrer que U induit un endomorphisme sur E_n noté U_n .
 - 5.2 Montrer que U_n est un automorphisme de E_n .
6. Justifier que si l'élément f de \mathcal{E} est dans $Ker(U)$ alors
 - (i) $\int_0^1 f(t) dt = 0$.
 - (ii) f est 1-périodique.
7. A-t-on $Ker(U) = \{f \in \mathcal{E} \mid f \text{ est 1-périodique et } \int_0^1 f(t) dt = 0\}$?
8. Donner explicitement une fonction non nulle et élément de $Ker U$ et en donner une représentation graphique sur $[-1,2]$.
9. L'endomorphisme U est-il surjectif ?
10. Soit a un réel non nul et f_a la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f_a(t) = e^{at}$.
 - 10.1 Déterminer $F_a = U(f_a)$.
 - 10.2 Dresser le tableau des variations de $g : \left(x \mapsto \frac{e^x - 1}{x}\right)$.
 - 10.3 En déduire que pour tout réel λ strictement positif, il existe une fonction f non nulle telle que $U(f) = \lambda f$.

Ex 26 Soit l'application Δ définie sur $\mathbb{R}[X]$ par : $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$.

1. Montrer que si (P_n) est une suite de polynômes telle que : $\forall n, \deg(P_n) = n$ alors $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
3. Déterminer $Ker(\Delta)$ et $Im(\Delta)$.
4. Montrer qu'il existe une et seule famille $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que : $H_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \Delta(H_n) = H_{n-1}$ et $H_n(0) = 0$.
5. Montrer que $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.
6. Soit $p \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}_p[X]$. Montrer que $P = \sum_{n=0}^p (\Delta^n(P))(0) H_n$.
7. Montrer que : $\Delta^n(P) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} P(X+k)$ puis $(\Delta^n P)(0) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} P(k)$.
8. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, H_n = \frac{1}{n!} X(X-1)(X-2) \dots (X-n+1)$.

Ex 27 Soit Ψ l'application qui, à une fonction f , associe sa dérivée f' .

1. Montrer que Ψ est un endomorphisme de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. Est-ce un automorphisme de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

Soit E l'ensemble des fonctions de la forme $(x \mapsto \tilde{P}(x) \cos(x) + \tilde{Q}(x) \sin(x))$ où P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{R}_1[X]$.

3. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
 4. Montrer que $B = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ est une base de E .
où $f_1: (x \mapsto \sin(x))$ $f_2: (x \mapsto x \sin(x))$ $f_3: (x \mapsto \cos(x))$ et $f_4: (x \mapsto x \cos(x))$.
 5. Montrer que E est stable par Ψ . On note D l'endomorphisme de E induit par Ψ . On note Id_E l'application identité sur E .
 6. Déterminer $\text{Ker}(D)$. En déduire que D est un automorphisme de E .
 7. Déterminer, selon les valeurs du réel λ , le rang de $D^2 - \lambda Id_E$.
 8. Déterminer une base et la dimension du noyau et de l'image de $D^2 + Id_E$.
 9. En déduire que $D^4 + 2D^2 + Id_E$ est l'application nulle de E .
 10. Retrouver alors que D est bijective et calculer D^{-1} en fonction de D .
- On note V le sous-espace de $\mathcal{L}(E)$ engendré par Id_E et D^2 .
11. Vérifier que V est stable par composition.
 12. Montrer que les éléments de V bijectifs sont les éléments de la forme : $\alpha Id_E + \beta D^2$ tel que α et β scalaires distincts.
 13. Résoudre dans \mathbf{R} l'équation différentielle : $y'' + y = 0$.
 14. Déterminer le noyau de $\Psi^2 + Id_E$.
 15. Montrer que E est le noyau de $(\Psi^2 + Id_E)^2$.
 16. Conclure que E est exactement l'ensemble des solutions de l'équation différentielle : $y^{(4)} + 2y^{(2)} + y = 0$.

Une application linéaire de E dans F est une application qui vérifie : **ou**
 . On note l'ensemble des applications linéaires de E dans F .

Un endomorphisme de E est une, on note l'ensemble des endomorphismes de E .

Un isomorphisme de E sur F est, on note l'ensemble des isomorphismes de E .

Un automorphisme de E est, on note l'ensemble des automorphismes de E .

Une forme linéaire sur E est une et on note l'ensemble des formes linéaires sur E .

Si $B = (e_i)_{i \in I}$ est une base de E et $F = (f_i)_{i \in I}$ est une famille de vecteurs de F alors il existe $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que :

Si $E = E_1 \oplus E_2$, $u_1 \in \mathcal{L}(E_1, F)$ et $u_2 \in \mathcal{L}(E_2, F)$. Alors il existe $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que :

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$

$$\forall (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in K^m, \forall (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m) \in E^m \quad u(\vec{O}_E) = \dots \text{ et } u(\sum_{i=1}^m \alpha_i \vec{x}_i) = \dots$$

$$\text{Ker}(u) = \dots \text{ est un } \dots \text{ et } \text{Im}(u) = \dots \text{ est un } \dots \text{ et } \text{rg}(u) = \dots$$

Si $B = (e_i)_{i \in I}$ est une base de E alors $\text{Im}(u) = \dots$

$$\text{rg}(u) \leq \dots \text{ et } \text{rg}(u \circ v) \leq \dots$$

$$\text{rg}(u) = \text{rg}(u \circ v) = \text{rg}(w \circ u) \text{ dès que } \dots$$

Si H est un ss-e-v de E alors $f(H) = \dots$ est un Si $u \in \text{Isom}(E, F)$ alors $\dim f(H) = \dots$

Si G est un ss-e-v de F alors $f^{-1}(G) = \dots$ est un Si $u \in \text{Isom}(E, F)$ alors $\dim f^{-1}(G) = \dots$

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et H un ss-e-v de E . H est stable par $u \Leftrightarrow \dots$ Alors $u_H: (\dots \rightarrow \dots)$ est l'endomorphisme de H induit par u .

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

$$u \text{ est injective} \Leftrightarrow \text{Ker}(u) = \dots \begin{matrix} \Leftrightarrow \\ \text{valable si} \\ E \text{ possède une base} \end{matrix} [(e_i)_{i \in I} \text{ base de } E \Rightarrow \dots] \begin{matrix} \Leftrightarrow \\ \text{valable si} \\ E \text{ est de dim finie} \end{matrix} \text{rg}(u) = \dots$$

$$u \text{ est surjective} \Leftrightarrow \text{Im}(u) = \dots \begin{matrix} \Leftrightarrow \\ \text{valable si} \\ E \text{ possède une base} \end{matrix} [(e_i)_{i \in I} \text{ base de } E \Rightarrow \dots] \begin{matrix} \Leftrightarrow \\ \text{valable si} \\ F \text{ est de dim finie} \end{matrix} \text{rg}(u) = \dots$$

$$u \text{ est isomorphisme} \Leftrightarrow \exists v \in \mathcal{L}(F, E) / u \circ v = \text{id}_F \text{ et } v \circ u = \text{id}_E \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Ker}(u) = \dots \\ \text{Im}(u) = \dots \end{cases}$$

$$\begin{matrix} \Leftrightarrow \\ \text{valable si} \\ E \text{ possède une base} \end{matrix} [(e_i)_{i \in I} \text{ base de } E \Rightarrow \dots] \begin{matrix} \Leftrightarrow \\ \text{valable si} \\ E \text{ est de dim finie} \end{matrix} \begin{cases} F \text{ est de } \dots \\ \text{rg}(u) = \dots = \dots \end{cases}$$

E et F sont isomorphes $\Leftrightarrow \dots \Rightarrow \dim(E) = \dots$

Si $\dim(E) = \dim(F) < +\infty$ et $u \in \mathcal{L}(E, F)$ alors : u est isomorphisme $\Leftrightarrow u \dots \Leftrightarrow u \dots \Leftrightarrow \text{rg}(u) = \dots$

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

$\text{Im}(u)$ est isomorphe à

Si E est de alors $\dim(\text{Ker}(u)) + \dots = \dots$ (théorème du rang).

Si $\vec{b} \in \text{Im}(u)$ alors les vecteurs \vec{x} tels que $u(\vec{x}) = \vec{b}$ sont

Si $(u, v) \in \mathcal{L}(E, F)^2$ et $(a, b) \in K^2$ alors, $(au + bv) \in \dots$

Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$ alors $v \circ u \in \dots$ et $[v \circ u = 0 \Leftrightarrow \dots]$ et $\text{Ker}(u) \dots \text{Ker}(v \circ u)$ et $\text{Im}(v) \dots \text{Im}(v \circ u)$

Si $(u, v) \in \mathcal{L}(E, F)^2$, $w \in \mathcal{L}(F, G)$ et $z \in \mathcal{L}(G, E)$ et $(a, b, c) \in K^3$, $(au + bv) = \dots$ et $(au + bv) \circ cz = \dots$

$\mathcal{L}(E, F)$ est $\mathcal{L}(E, F)$

Si $u \in \text{Isom}(E, F)$ alors $u^{-1} \in \dots$

Soit $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$ et $(a, b) \in K^2$.

$$au + bv \in \dots \text{ et } v \circ u \in \dots$$

$$u^0 = \dots \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, u^n = \underbrace{\dots}_{n \text{ fois}} = \dots$$

u est nilpotent d'indice p lorsque

Si $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ alors $P(u) = \dots$

Si $u \circ v = v \circ u$ alors $\forall n \in \mathbb{N}, (u + v)^n = \dots$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u^n - v^n = \dots$

$$u \in \text{GL}(E) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Ker}(u) = \dots \\ \text{Im}(u) = \dots \end{cases} \begin{matrix} \Leftrightarrow \\ \text{valable si} \\ E \text{ possède une base} \end{matrix} [(e_i)_{i \in I} \text{ base de } E \Rightarrow \dots] \Rightarrow u^{-1} \in \dots$$

$$u \in \text{GL}(E) \begin{matrix} \Leftrightarrow \\ \text{valable si} \\ E \text{ est de dim finie} \end{matrix} u \dots \begin{matrix} \Leftrightarrow \\ \text{valable si} \\ E \text{ est de dim finie} \end{matrix} u \dots \begin{matrix} \Leftrightarrow \\ \text{valable si} \\ E \text{ est de dim finie} \end{matrix} \text{rg}(u) = \dots$$