TD 21

Matrices d'une application linéaire .

Ex 0 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$canoniquement associé à $A=\begin{pmatrix}0&1&-1\\-3&4&-3\\-1&1&0\end{pmatrix}$. Montrer que f^2 est combinaison linéaire de f et $id_{\mathbb{R}_2[X]}$. En déduire $f^n\ tq\ n\in\mathbb{N}$..

Ex 1 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$canoniquement associé à $A=\begin{pmatrix}8&-1&-5\\-2&3&1\\4&-1&-1\end{pmatrix}$.

1) f est-il un automorphisme ? Si oui, déterminer f^{-1}.
2) Déterminer tous les réels λ tels qu'il existe un triplet u non nul vérifiant $f(u)=\lambda u$.
3) Montrer que $\mathrm{Ker}(f-4id_{\mathbb{R}^3})^2\oplus Ker(f-2id_{\mathbb{R}^3})=\ \mathbb{R}^3$
4) Montrer qu'il existe une base $B'=(u,v,w)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que : $A'=mat_{B'}f=\begin{pmatrix}4&3&0\\0&4&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.
5) En déduire $A^n\ tq\ n\in\mathbb{N}$.

Ex 2 Soit $f\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}_2[\mathrm{X}])$ canoniquement associée à $A=\begin{pmatrix}a&2&3\\3&a&2\\2&3&a\end{pmatrix}$ où a est un paramètre réel.

a. Décrire $f((x,y,z))$.
b. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles f est surjective.
c. Déterminer le noyau et l'image de f lorsque f n'est pas bijective.

Ex 3 Soit E un K-e-v de dimension 3 et $f\in\mathscr{L}(E)$ tel que $rg(f)=1$.

1) Justifier qu'il existe une base B de E dans laquelle la matrice de f a ses deux premières colonnes nulles.
2) Montrer qu'il existe $a\in K$ tq : $f^2=af$.

Ex 4 Soit $a_1,a_2,..,a_n$des réels et $\varphi:\begin{pmatrix}\mathbb{R}_{n-1}[X]\to\mathbb{R}^n\\P\mapsto(\tilde{P}(a_1),\tilde{P}(a_2),..,\tilde{P}(a_n))\end{pmatrix}$ et $V(a_1,a_2,..,a_n)=\begin{vmatrix}1&a_1&a_1^2&a_1^{n-1}\\1&a_2&a_2^2&a_2^{n-1}\\&&&\cdots\\1&a_n&a_n^2&a_n^{n-1}\end{vmatrix}$le déterminant de de Vandermonde associé à $a_1,a_2,..,a_n$

a) Montrer que φ est un isomorphisme si et ssi $a_1,a_2,..,a_n$sont tous distincts.
b) Désormais $a_1,a_2,..,a_n$sont tous distincts. On pose $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $L_k(X)=\prod_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n}\frac{X-a_i}{a_k-a_i}$. Montrer que $B=(L_1,L_2,..,L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
c) Quelles sont les composantes dans B d'un polynôme P de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$?
d) En déduire la matrice de passage de B à B_c la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
e) Montrer que $V(a_1,a_2,..,a_n)\neq 0$ sietssi $a_1,a_2,..,a_n$sont tous distincts.

Ex 5 Soient $f_1:(x\mapsto e^{-x})$, $f_2:(x\mapsto xe^{-x})$, $f_3:(x\mapsto x^2e^{-x})$ et E le sous espace vectoriel de $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ engendré par ces trois applications .$\forall f\in E$, on pose $\varphi(f)=f'$.

1. Déterminer $dimE$. On note $B=(f_1,\ f_2,\ f_3)$.
2. Montrer que $\varphi\in\mathscr{L}(E)$. Ecrire la matrice A de φ dans B.
3. Calculer $A^n,n\in\mathbb{N}$.
4. En déduire, pour tout entier n , la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $g:(x\mapsto(3-2x+8x^2)e^{-x})$.
5. $\forall f\in E$, on pose $\Gamma(f)=\ f\ +\ f'$. Justifier que Γ est un endomorphisme de E et donner une base de $Ker\Gamma\ et\ Im\Gamma$.
6. Soit $h:(x\mapsto(2+2x)e^{-x})$. Trouver les solutions de l'équation $f'+f=\ h$.

Ex 6 Soit$E$ le $\mathbb{R}$-e-v. des suites réelles $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que : $\forall n\in\mathbb{N},u_{n+3}=u_n$.

1. On pose $\forall u\in E$, $\Phi\,(u)=(u_0,u_1,u_2)$. Montrer que Φ est une bijection de E sur $\mathbb{R}^3$. En déduire la dimension de E.
2. On pose $\forall i\in\{1,2,3\},\varepsilon_i=\Phi^{-1}(e_i)$ où (e_1,e_2,e_3) est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
   Justifier que $B=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ est une base de $E\ et$ expliciter les suites $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$.
3. Soit d l'application définie sur E par : $\forall u\in E,\ d(u)=w$ tel que $\forall n\in\mathbb{N},w_n=u_{n+1}$.
   3.a. Montrer que $d\in\mathscr{L}(E)\ et$ déterminer la matrice de d dans B.
   3.b. Calculer $d^k\ tel\ que\ k\in\mathbb{N}$. En déduire que d est un automorphisme de E et exprimer d^{-1} en fonction de d.
   3.c. Déterminer $D=Ker(d-Id_E)$.
   3.d. Soit $F\ =vect(\varepsilon_3-\varepsilon_1,\varepsilon_1+\varepsilon_2-2\varepsilon_3)$. Montrer que $F\oplus D\ =\ E$.
   3.e. Montrer que F est stable par d.

4.d. Justifier qu'il existe une base B' de E telle que $mat_{B'}d = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Ex 7 Soit $Q_k = (X+1)^k(X-2)^{n-k}$ et f l'application définie par : $f(P) = (X-2)P' - P$

1. Montrer que $B' = (Q_k)_{k=0..n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Déterminer les matrices de f dans la base canonique B de $\mathbb{R}_n[X]$ et dans B'.
4. Quelle relation y-a-t-il entre ces matrices ?
5. Décrire $Ker\, f$ et Imf.

Ex 8 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $et\ f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à A.

1. Déterminer $Kerf\ , Imf\ et\ rgf$.
2. Montrer que $Ker(f^2)\ et\ Ker(f-id)^2$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.
3. Montrer que A est semblable à $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ i.e.qu' il existe P inversible telle que $A = P^{-1}TP$.
4. En déduire les puissances de A.

Ex 9 Soit E un K-e_v de dimension 3 et f un endomorphisme de E tel que : $f^2 \neq 0\ et\ f^3 = 0$. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. **Application :** Montrer que $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ sont semblables.

Ex 10 Matrices semblables Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}\ et\ B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Montrons par deux méthodes que A et B sont semblables.

Ex 11 Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $a \in \mathbb{R}$ fixé et $\varphi : (P \mapsto (X-a)\big(P'(X) - P'(a)\big) - 2\big(P(X) - P(a)\big))$.

1. Vérifier que φ est un endomorphisme de E et écrire sa matrice dans la base canonique de E puis sa matrice dans la base de Taylor $B = (1, (X-a), (X-a)^2, .., (X-a)^n)$.
2. Quelle relation y a-t-il entre ces deux matrices ?
3. Déterminer le noyau et l'image de φ et le rang de φ .

Ex 12 Soit $\Phi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X].)\ tel\ que\ \forall k \in \{0,..,n\}, \Phi(X^k) = X^{n-k}$. Soit B la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. et $f : (P \mapsto P')$.

1. Montrer que $\boldsymbol{\Phi}$ est une involution. Décrire ses éléments caractéristiques.
2. En déduire que $\boldsymbol{\Phi}$ est bijective et décrire $\boldsymbol{\Phi^{-1}}$.
3. Posons $g = \boldsymbol{\Phi} \circ \boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{\Phi}$. Déterminer la matrice A de g dans B
4. Posons $h = g + f$.Montrer que :$\forall P \in E, h(P) = nXP - (X^2-1)P'$
5. Justifier que $C = ((X-1)^k(X+1)^{n-k})_{k=0..n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et déterminer la matrice de h dans cette base.
6.

Ex 13 Soit $u : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) \mapsto (2x - y - z, -x + 2y - z, -x - y + 2z) \end{pmatrix}$

1. Vérifier que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit λ . Démontrer qu'il existe un vecteur non nul X tel que $u(X) = \lambda X$ **<u>si et ssi</u>** $\lambda \in \{0,3\}$.
3. Justifier que $Ker(u)\ et\ Ker(u - 3id)$ sont supplémentaires dans E.
4. En déduire que $u\ est$ la composée de deux endomorphismes simples.

Ex 14 Soit $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base d'un K-e-v E et $D = \{4\alpha\vec{j} + \alpha\vec{k} / \alpha \in \mathbb{R}\}\ et\ P = \{a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} / a + b + c = 0\}$.
Soit p la projection sur D et parallèlement à P et s la symétrie par rapport à P et parallèlement à D.

1. Ecrire la matrice de p dans une base bien choisie de telle sorte que cette matrice soit diagonale.
2. Puis écrire la matrice de p dans B puis celle de s dans cette même base.

Ex 15 Justifier que toute matrice triangulaire supérieure de diagonale nulle est nilpotente.

Ex 16 Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n telle que : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, |a_{ij}| < \frac{1}{n}$.
Démontrer par l'absurde que la matrice $I_n + A$ est inversible. (introduire l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A)

Ex 17 $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \varphi(P) = P(X+1)$.

1. Justifier que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Déterminer M la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ et M^{-1}.

2. Soit $a_0,..,a_n,b_0,..,b_n$ des réels tels que : $b_p=\sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}a_j$. Exprimer $a_0,..,a_n$ en fonction de $b_0,..,b_n$.

Ex 18 Soit $A=\begin{pmatrix}\binom{0}{0} & a\binom{1}{0} & a^2\binom{2}{0} & \cdots & a^n\binom{n}{0}\\ 0 & -\binom{1}{1} & -a\binom{2}{1} & \cdots & -a^{n-1}\binom{n}{1}\\ & 0 & \binom{2}{2} & & \vdots\\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & (-1)^n\binom{n}{n}\end{pmatrix}$. Justifier que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Ex 19 Soit $\underline{E \text{ de dimension finie } n.}$ Soit u un endomorphisme de E tel que $u^{n-1}\neq O \; et \; u^n=O$ i.e. u est nilpotent d'indice n.

1. Montrer qu'il existe un vecteur $\vec{x}$ de E tel que : $B=(\vec{x},u(\vec{x}),u^2(\vec{x}),\dots,u^{n-1}(\vec{x}))$ base de E.
2. Ecrire les matrices de $u,u^2,..,u^{n-1}$ dans la base B.
3. En déduire que $\{g\in L(E)/u\circ g=g\circ u\}=vect(Id,u,u^2,\dots,u^{n-1})$.

Ex 20 soit E un K-e-v de dimension 3.

1. Soit u un endomorphisme de E et soient $i \; et \; j$ deux entiers naturels.

On considère l'application w de $Ker\;(u^{i+j})$ vers E définie par : $w(x)=u^j\;(x)$.
   a. Montrer que $Im(w)\subset\; Ker\;(u^i)$.
   b. En déduire que $dim(Ker\;u^{i+j})\leq dim(Ker\;(u^i)\;)\;+\;dim(Ker\;(u^j)\;)$
2. Soit u un endomorphisme de E vérifiant : $u^3=0 \; et \; rg(u)=2$
   a. Montrer que $dim(Ker\;u^2)=2$ (on pourra utiliser deux fois la question 2b.)
   b. Montrer que l'on peut trouver un vecteur a non nul de E tel que $u^2(a)\neq 0$ et en déduire que la famille $(u^2(a),u(a),a)$ est une base de E.
   c. Ecrire la matrice $U \; de \; u$ et la matrice $V \; de \; u^2-u$ dans cette base.
3. Soit u un endomorphisme de E vérifiant : $u^2=0 \; et \; rg(u)=1$
   a. Montrer que l'on peut trouver un vecteur b non nul de E tel que $u(b)\neq 0$
   b. Justifier l'existence d'un vecteur c de $Ker\;(u\;)$tel que $(u(b),c)$ soit libre puis montrer que la famille $(\;b,u(b)\;,c)$ est une base de E.
   c. Ecrire la matrice $U' \; de \; u$ et la matrice $V' \; de \; u^2-u$ dans cette base.

Ex 21 Soit $E=\mathbb{R}_n[X] \; et \; f$ définie sur E par : $f(P)=\frac{1}{2}\left(P\left(\frac{X}{2}\right)+P\left(\frac{X+1}{2}\right)\right)$.

1. Montrer que f est un automorphisme de E.
2. Déterminer tous les réels λ tels qu'il existe un polynôme P non nul vérifiant $f(P)=\lambda P$.
3. Pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, $Q_k\in\mathbb{R}[X]$ tel que : $Q_k\neq 0 \; et \;\; f(Q_k)=\frac{1}{2^k}Q_k$. Montrer que $(Q_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. Donner la matrice de f dans cette nouvelle base.