CORRIGE DL 4 Partie I

Ex 1

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}\,e^{1-\frac{1}{x}}\ si\ x\in]0,1]\\ ax^2+bx+1\ si\ x\in\ ]1,2].\\ 2\frac{x^3+3x^2-16x+12}{x^2-4}\ si\ x>2\end{cases}$

1. Justifier que f est au moins continue et dérivable sur $]0,1[\cup]1,2[\cup]2,+\infty[$.

Posons :

$\forall x\in]0,1[,\alpha(x)=\sqrt{x}e^{1-\frac{1}{x}}$

$\forall x\in]1,2[,\beta(x)=ax^2+bx+1$

Quotient reste

$division\ euclidienne\ de\ x^2+5x-6\ par\ x+2$

$x^2+5x-6=(x+2)(x+3)-12$

$\forall x\in]2,+\infty[,\delta(x)=2\frac{x^3+3x^2-16x+12}{x^2-4}=2\frac{(x-2)(x^2+5x-6)}{(x-2)(x+2)}=2\frac{x^2+5x-6}{x+2}\ \widetilde{=}\ 2\frac{(x+2)(x+3)-12}{x+2}=2(x+3)-\frac{24}{x+2}$.

$f\ et\ \alpha$ coïncident sur l'intervalle ouvert $]0,1[$. Comme α est de classe C^∞ sur $]0,1[$ car $\left(x\mapsto\sqrt{x}\right)$ et $\left(x\mapsto e^{1-\frac{1}{x}}\right)$ le sont , f est de classe C^∞ sur $]0,1[$ et $\forall k\in\mathbb{N},\forall x\in]0,1[,f^{(k)}(x)=\alpha^{(k)}(x)$ et en particulier, $f'(x)=\alpha'(x)=e\left[\frac{1}{2\sqrt{x}}+\sqrt{x}\frac{1}{x^2}\right]e^{-\frac{1}{x}}$.

Idem sur $]1,2[$ et sur $]2,+\infty[$. Et, $\forall x\in]1,2[,f'(x)=\beta'(x)=2ax+b\ et\ \forall x\in]2,+\infty[,f'(x)=\delta'(x)=2+\frac{24}{(x+2)^2}$.

2. f est-elle prolongeable par continuité en 0 ? Si oui , son prolongement est-il dérivable en 0 ?

$\lim\limits_{x\to0}\sqrt{x}\,e^{1-\frac{1}{x}}=0$. Donc f est prolongeable par continuité en 0 par la valeur 0. Posons $\tilde{f}:\left(x\mapsto\begin{cases}0\ si\ x=0\\ f(x)si\ x>0\end{cases}\right)$ est donc continue en 0 et dérivable sur $]0,1[$ et $\forall x\in]0,1[,\tilde{f}'(x)=f'(x)=e\left[\frac{1}{2\sqrt{x}}+\sqrt{x}\frac{1}{x^2}\right]e^{-\frac{1}{x}}$. De plus, $e\left[\frac{1}{2\sqrt{x}}+\sqrt{x}\frac{1}{x^2}\right]e^{-\frac{1}{x}}=\frac{e}{2}\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}}{e^{\frac{1}{x}}}+e\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}}}{e^{\frac{1}{x}}}$. Et $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty$ et $\forall\alpha\in\mathbb{R}^{+*}$, $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{t^\alpha}{e^t}\overset{cc}{\widetilde{=}}0$. Donc par composition, $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}}{e^{\frac{1}{x}}}=0=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}}}{e^{\frac{1}{x}}}$. j'en déduis que $\lim\limits_{x\to0^+}\tilde{f}'(x)=0$. Alors le critère de dérivabilité permet de conclure que $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\tilde{f}(x)-\tilde{f}(0)}{x-0}=0$. J'en conclus que $\tilde{f}$ est dérivable en 0 et $\tilde{f}'(0)=0$.

3. Déterminer une relation entre $a\ et\ b$ pour que : f soit continue en 1 .

f est continue en $1\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to1^-}\sqrt{x}e^{1-\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to1^+}ax^2+bx+1=f(1)$.

Or , $f(1)=\sqrt{1}e^{1-\frac{1}{1}}=1=\lim\limits_{x\to1^-}\sqrt{x}e^{1-\frac{1}{x}}$. Et, $\lim\limits_{x\to1^+}ax^2+bx+1=a+b+1$.

Par conséquent, f est continue en $1\Leftrightarrow a+b+1=1\Leftrightarrow b=-a$.

4. Montrer que f est dérivable en 1 si et seulement si $\begin{cases}a=\frac{3}{2}\\ b=-\frac{3}{2}\end{cases}$.

f est dérivable en $1\Leftrightarrow\begin{cases}f\text{ est continue en }1\\ \lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\ existe\ et\ est\ finie\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=-a\\ \lim\limits_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\ et\ \lim\limits_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\ existent, sont\ finies\ et\ égales\end{cases}$.

Prenons $b=-a$ (puisque c'est une condition nécessaire pour que f soit dérivable en 1). Etudions $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\ et\ \lim\limits_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

Alors f est continue en 1 et dérivable au moins sur $]0,1[\ et\ \forall x\in]0,1[,f'(x)=e\left[\frac{1}{2\sqrt{x}}+\sqrt{x}\frac{1}{x^2}\right]e^{-\frac{1}{x}}$. Donc $\lim\limits_{x\to1^-}f'(x)=\frac{e\left[\frac{1}{2}+1\right]}{e}=\frac{3}{2}$. Alors le critère de dérivabilité permet de conclure que $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{3}{2}$.

De même, f est continue en 1 et dérivable au moins sur $]1,2[\ et\ \forall x\in]1,2[,f'(x)=2ax+b=2ax-a$. Donc $\lim\limits_{x\to1^-}f'(x)=a$. Alors le critère de dérivabilité permet de conclure que $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=a$.

J'en conclus que : f est dérivable en $1\Leftrightarrow\begin{cases}b=-a\\ a=\frac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{3}{2}\\ b=-\frac{3}{2}\end{cases}$.

Désormais $\begin{cases}a=\frac{3}{2}\\ b=-\frac{3}{2}\end{cases}$ et $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}\,e^{1-\frac{1}{x}}\ si\ x\in]0,1]\\ \frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2}x+1\ si\ x\in\ ]1,2].\\ 2(x+3)-\frac{24}{x+2}.\ si\ x>2\end{cases}$ L'équation de la tangente à Cf en 1 est $y=\frac{3}{2}(x-1)+1=\frac{1}{2}(3x-1)$.

5. Montrer que f est continue en 2 .

f est continue en $1\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to2^-}\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2}x+1=\lim\limits_{x\to2^+}2(x+3)-\frac{24}{x+2}=f(2)$.

$f(2)=\frac{3}{2}4-\frac{3}{2}2+1=4=\lim\limits_{x\to2^-}\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2}x+1$. Et $\lim\limits_{x\to2^+}2(x+3)-\frac{24}{x+2}=10-6=4$. Ainsi, f est continue en 2.

6. f est-elle dérivable en 2 ?

f est dérivable en 1 $\Leftrightarrow \lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ *existe et est finie* $\Leftrightarrow$ $\lim_{x\to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ *et* $\lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ *existent, sont finies et égales.*

D'une part, f est continue en 2 et dérivable au moins sur $]2,+\infty[$ *et* $\forall x \in]2,+\infty[, f'(x) = 2 + \frac{24}{(x+2)^2}$.Donc, $\lim_{x\to 2^+} f'(x) = 5$. Par conséquent, $\lim_{x\to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = 5$.

D'autre part, f est continue en 2 et dérivable au moins sur $]1,2[$ *et* $\forall x \in]2,+\infty[, f'(x) = 3x - \frac{3}{2}$.Donc, $\lim_{x\to 2^-} f'(x) = \frac{9}{2}$. Par conséquent, $\lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \frac{9}{2}$. Comme $\frac{9}{2} \neq 5$, j'en conclus que f n'est pas dérivable en 2. Par contre f est dérivable à droite et à gauche en 2 et $f'_d(2) = 5$ *et* $f'_g(2) = \frac{9}{2}$. Cf a donc deux demi-tangentes au poitn $A(2,4)$ de pente 5 à droite et $\frac{9}{2}$ à gauche.

7. Quelle est la limite de f en$+\infty$?

$\forall x \in]2,+\infty[, f(x) = \delta(x) = 2(x+3) - \frac{24}{x+2}$. Donc, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 2(x+3) - \frac{24}{x+2} = +\infty$.

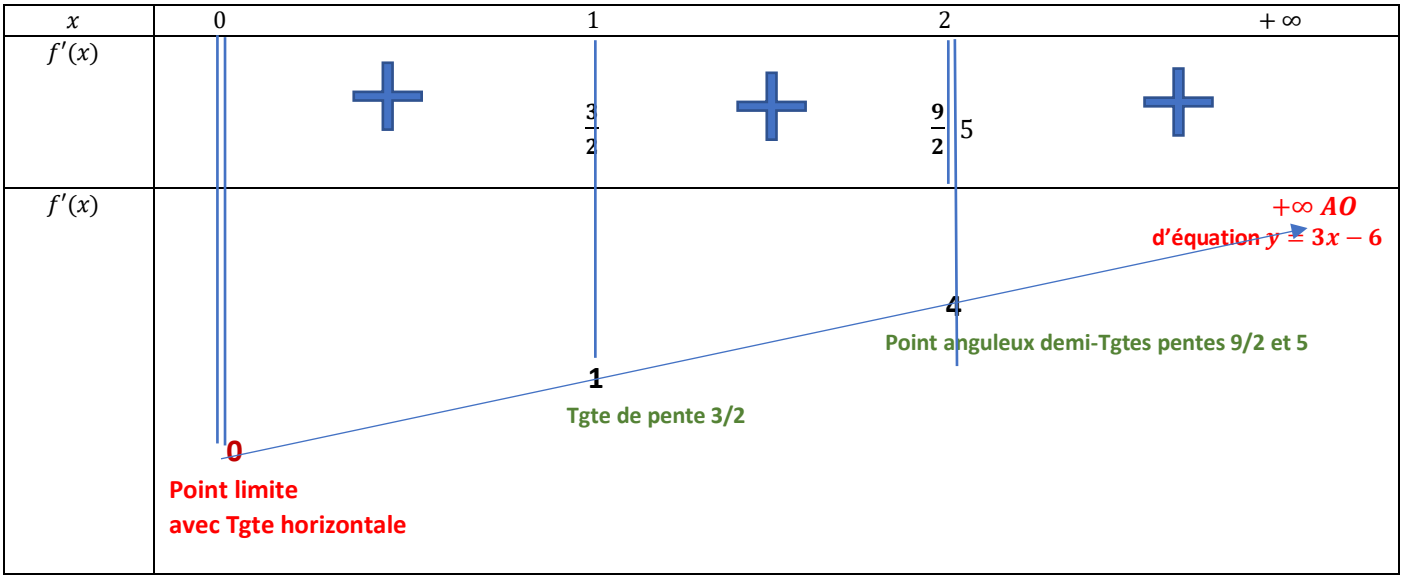
8. Montrer que Cf a une asymptote oblique en $+\infty$ et déterminer son équation.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) - 2(x+3) = \lim_{x\to+\infty} -\frac{24}{x+2} = 0$. Donc, la droite d'équation $y = 2x + 6$ est asymptote à Cf en $+\infty$.

9. Etudier les variations de f.

$\forall x \in]0,1[,\ f'(x) = e\left[\frac{1}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}\frac{1}{x^2}\right]e^{-\frac{1}{x}} > 0$, $\forall x \in]1,2[, f'(x) = 3x - \frac{3}{2} > 0$ *et* $\forall x \in]2,+\infty[, f'(x) = 2 + \frac{24}{(x+2)^2} > 0$.

Par conséquent, f est strictement croissante sur chaque intervalle $]0,1[,]1,2[$ *et* $]2,+\infty[$. Comme, de plus, f est continue en 1 et en 2 , f est strictement croissante sur $Df =]0,+\infty[$.



10. a) Justifier que f est bijective de Df sur Df
b) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $Df\backslash\{4\}$. Calculer $(f^{-1})'(10)$.
c) Que dire de Cf^{-1} au point $B(4,2)$?

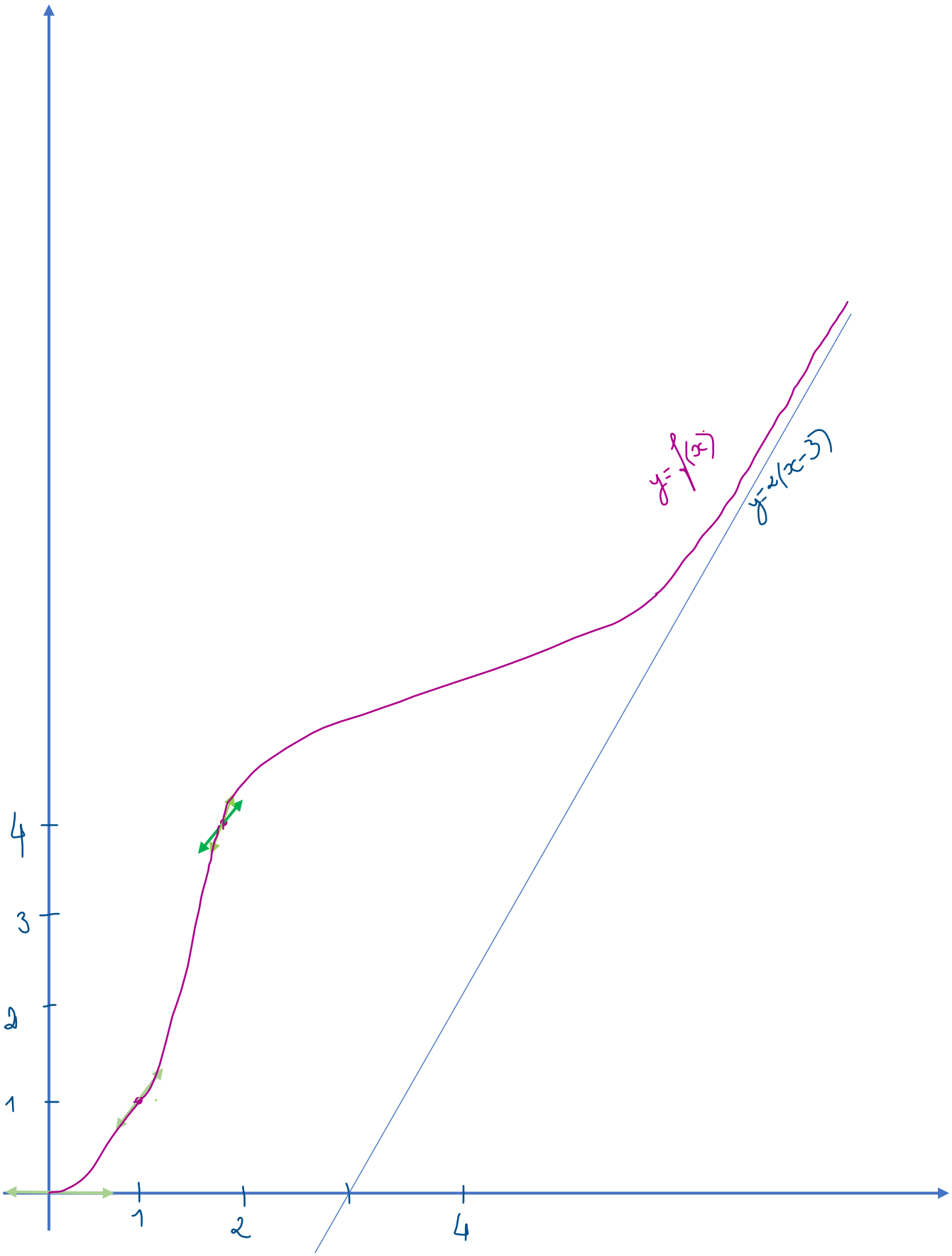
a)Comme f est continue et strictement croissante sur Df, le $TBCSM$ assure que $f(Df) =]\lim_{x\to 0} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)[=]0,+\infty[$ et f est bijective de $]0,+\infty[$ *sur* $]0,+\infty[$.

b)De plus, f est dérivable sur $Df\backslash\{2\}$ et $\forall x \in Df\backslash\{2\}, f'(x) = \begin{cases} e\left[\frac{1}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}\frac{1}{x^2}\right]e^{-\frac{1}{x}} \text{ si } x \in]0,1[\\ \frac{3}{2} \text{ si } x = 1 \\ 3x - \frac{3}{2} \text{ si } x \in]1,2[\\ 2 + \frac{24}{(x+2)^2} \text{ si } x > 2 \end{cases}$.

Donc , $\forall x \in Df\backslash\{2\}, f'(x) > 0$. Alors le $TDBR$ assure que f^{-1} est dérivable sur $f(Df\backslash\{2\}) = Df\backslash\{4\}$. En particulier f^{-1} est dérivable en 10 et $(f^{-1})'(10) = \frac{1}{f'(f^{-1}(10))}$. D'après les variations de f, $f^{-1}(10)$, l'unique antécédent de 10 par f se trouve dans $]2,+\infty[$ et est donc le réel a tel que :

$\begin{cases} a > 2 \\ f(a) = 10 \end{cases}$ i.e. $\begin{cases} a > 2 \\ 2(a+3) - \frac{24}{a+2} = 10 \end{cases}$. Or, $2(a+3) - \frac{24}{a+2} = 10 \Leftrightarrow (2a+6)(a+2) - 24 - 10(a+2) = 0 \Leftrightarrow 2a^2 - 32 = 0 \Leftrightarrow a = \pm 4$.

Donc, $a = 4$. Ainsi, $f^{-1}(10) = 4$ *et* $(f^{-1})'(10) = \frac{1}{f'(4)} = \frac{1}{f'(4)=2+\frac{24}{(6)^2}=2+\frac{2}{3}=\frac{8}{3}} = \frac{3}{8}$.

c) Le point $A(2,4)$ est un point anguleux de Cf avec deux demi-tangentes de pentes $\frac{9}{2}$ et 5. Donc par symétrie entre Cf et Cf^{-1}, je peux affirmer que le point $B(4,2)$ est un point anguleux de Cf^{-1} avec deux demi-tangentes de pentes $\frac{2}{9}$ et $\frac{1}{5}$.

11. Représenter Cf : on s'appliquera à préciser la courbe au voisinage des points d'abscisses 1 et 2 et on donnera une allure très grossière sur $]0,1[$.