

E et F désignent ici deux $K - e - v$ de dimensions finies non nulles tq : $\dim(E) = p \in \mathbb{N}^*$ et $\dim(F) = n \in \mathbb{N}^*$.

Matrice d'une application linéaire dans deux bases

choisis : Soit $B_1 = (\vec{e}_k)_{k=1..p}$ une base du K -e-v E et $B_2 = (\vec{v}_k)_{k=1..n}$ une base du K -e-v F . Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. La **matrice de f dans les bases B_1 et B_2** , notée $mat_{B_1, B_2}(f)$, est la matrice des composantes de la famille $(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_p))$ dans la base B_2 . Autrement dit, $M = mat_{B_1, B_2}(f) =$

$$mat_{B_2} \left(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_p) \right) = \begin{pmatrix} \text{composantes de } f(\vec{e}_1) & \text{composantes de } f(\vec{e}_2) & \dots & \text{composantes de } f(\vec{e}_p) \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{selon } \vec{v}_1 \\ \text{selon } \vec{v}_2 \\ \dots \\ \text{selon } \vec{v}_n \end{matrix}$$

Matrice d'un endomorphisme dans une base :

Si f est un endomorphisme de E alors on peut prendre $B_1 = B_2 = B = (\vec{e}_k)_{k=1..p}$ base de E et la **matrice de f dans B** est $mat_B f = mat_{B, B} f = mat_B(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_p))$. 1

NB : Une telle matrice se lit donc en colonne : la colonne k contient les composantes du vecteurs $f(\vec{e}_k)$ dans la base B_2 ce qui signifie que $f(\vec{e}_k) = a_{1k}\vec{v}_1 + a_{2k}\vec{v}_2 + \dots + a_{nk}\vec{v}_n$. 2

Exos 1

1. Soit $f : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto (a-2b)X^2 + (b+d-a)X + 3c-a$.

Montrons que f est linéaire de $M_2(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ et déterminons sa matrice dans les bases canoniques de ces deux \mathbb{R} -e-v.

2. Montrer que $B_2 = ((X-1)(X-2), X(X-2), X(X-1))$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Soit f définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par : $f(P) = (P(0), P(1), P(2))$. Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R}^3)$. Déterminer la matrice D de f dans les bases B_2 et B_c et la matrice M de f dans les bases B_1 et B_c .

Correction de l'exercice : <http://youtu.be/BYHu6xcflKM?hd=1>

Formule fondamentale :

Soit $B_1 = (\vec{e}_k)_{k=1..p}$ une base du $K - e - v E$ et $B_2 = (\vec{v}_k)_{k=1..n}$ une base du $K - e - v F$ et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

$$\forall \vec{x} \in E, \underbrace{mat_{B_2}(f(\vec{x}))}_Y = \underbrace{mat_{B_1, B_2}(f)}_M \times \underbrace{mat_{B_1}(\vec{x})}_X \quad \text{i.e.} \quad Y = MX.$$

Cas d'un endomorphisme : Soit $B = (\vec{e}_k)_{k=1..p}$ une base du $K - e - v E$ et $f \in \mathcal{L}(E)$.

Alors, $mat_B(f(\vec{x})) = mat_B(f) \times mat_B(\vec{x})$.

CETTE FORMULE PERMET D'OBTENIR L'EXPRESSION D'UNE APPLICATION LINEAIRE CONNAISSANT UNE MATRICE DE CETTE APPLICATION DANS DES BASES CONNUES. 3

Csq : une application linéaire de E dans F est entièrement caractérisée par sa matrice dans deux bases fixées.

Exo2 : Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_1[X], M_2(\mathbb{R}))$ telle que $mat_{B_1, B_2} f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \\ 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ où $B_1 = (3, 6 - 2X)$ et $B_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$. Déterminons $f(a + bX)$.

Exemples IMPORTANTS :

1. Soit $M \in M_{n,p}(K)$. Si B_1 est une base canonique de E et B_2 est une base canonique de F , l'**application linéaire f de E dans F canoniquement associée à M** est l'unique application linéaire de E dans F telle que $mat_{B_1, B_2} f = M$.
2. Soit $M \in M_n(K)$. L'**endomorphisme f de K^n canoniquement associé à M** est l'unique endomorphisme de E telle que $mat_B f = M$.
3. **Matrice de l'identité :** Soit B_1, B_2 deux bases de E et $\dim(E) = p$. Alors, $mat_{B_1} id_E = I_p$ et $mat_{B_2, B_1} id_E = mat_{B_1, B_2} =$ matrice de passage de B_1 à $B_2 = P(B_1, B_2)$.

Csq : toute matrice est la matrice d'une application linéaire.

Exo3 : Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 canoniquement associé à $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer une expression de f .

Théorème fondamentale : Soit $B_1 = (\vec{e}_k)_{k=1..p}$ une base du K -e-v E et $B_2 = (\vec{v}_k)_{k=1..n}$ une base du K -e-v F et f une application de E dans F . Alors, $\nabla : \begin{pmatrix} \mathcal{L}(E, F) \rightarrow M_{n,p}(K) \\ f \mapsto mat_{B_1, B_2} f \end{pmatrix}$ est un isomorphisme.

Csq : Si E et F sont de dimension finie alors $\mathcal{L}(E, F)$ est de dimension finie égale à $\dim(E) \times \dim(F)$. 5

« Lecture » matricielle du rang, noyau et de l'image :

Soit B_1 base de E et B_2 base de F . Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $M = mat_{B_1, B_2}(f)$.

1. Les colonnes de M sont les composantes dans B_2 des vecteurs d'une famille génératrice de $Im(f)$.
2. $rg(f) = rg(M)$.
3. Soit $\vec{x} \in E$ et $X = mat_{B_1} \vec{x}$.

Alors, $\vec{x} \in Ker(f) \Leftrightarrow \underbrace{MX = 0}_{\text{système linéaire}} \Leftrightarrow X \in Ker M$. 5

Exos4 :

1. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ canoniquement associé à $M = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -1 & -8 & 2 \\ 4 & 14 & 1 \end{pmatrix}$. Donnons une base de $Ker(f)$ et $Im(f)$.

2. Soit E un espace vectoriel et $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ une base de E . Soit u un endomorphisme de E tel que la matrice de u par rapport à cette base B est :

$$M = mat_B(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- a. Donner le rang de u , une base de $Im(u)$, une base de $Ker(u)$ en fonction des vecteurs de la base B .
- b. Soit \vec{x} un élément de E . Déterminer $u(\vec{x})$.
4. Soit $u : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$ définie par : $u(P) = P + (1-X)P'$. Montrer que $Ker(u) \oplus Im(u) = \mathbb{R}_n[X]$.

Méthode « tout en 1 » pour obtenir rang de f , base de $Im f$ et base de $Ker f$

1. J'échelonne M en COLONNES : $M \sim_C R$, R échelonnée.
2. J'en déduis
 - a) $rg M$ puis la dimension de $Ker(f)$ grâce au théorème du rang.
 - b) une base de $Im(f)$ grâce aux colonnes non nulles de R .
 - c) une base de $Ker(f)$ grâce aux colonnes nulles de R . 6

Caractérisation matricielle d'un Isomorphisme.

ICI **$\dim E = \dim F < +\infty$** Soit B_1, B_2 des bases respectivement de E et F .

- 1) Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $M = mat_{B_1, B_2}(f)$.
 - f est un isomorphisme de E sur F $\Leftrightarrow M$ inversible
 - $\Leftrightarrow f$ injective
 - $\Leftrightarrow f$ surjective.
- 2) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $M = mat_{B_1}(f)$.
 - $\underbrace{f \in GL(E)}_{f \text{ est un automorphisme de } E} \Leftrightarrow M$ inversible
 - $\Leftrightarrow f$ injective
 - $\Leftrightarrow f$ surjective.

Exo5 : Soit E l'espace vectoriel engendré par $f_1 : (x \mapsto 1), f_2 : (x \mapsto \sin(x))$ et $f_3 : (x \mapsto \sin(2x))$.

- 1) Déterminer la dimension de E .
- 2) Soit $u : E \rightarrow \mathbb{R}^3$ tel que : $u(f) = \left(f\left(\frac{\pi}{2}\right), f(\pi), f\left(\frac{\pi}{6}\right) \right)$. Montrer que u est linéaire. Est-ce un isomorphisme ?

Matrice d'une combinaison linéaire, d'une composée d'un itéré et d'une isomorphisme réciproque

Soit E, F et G des K -e-v de dimension finie et B_1 base de E et B_2 base de F et B_3 base de G .

- 1) (Rappel) Si $(f, g) \in \mathcal{L}(E, F)^2$ et $(\alpha, \beta) \in K^2$ alors $mat_{B_1, B_2}(\alpha f + \beta g) = \alpha mat_{B_1, B_2}(f) + \beta mat_{B_1, B_2}(g)$.
- 2) Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$ alors $mat_{B_1, B_3}(g \circ f) = mat_{B_2, B_3}(g) \times mat_{B_1, B_2}(f)$. (**)
- 3) Si f est un isomorphisme de E sur F alors $mat_{B_2, B_1}(f^{-1}) = (mat_{B_1, B_2}(f))^{-1}$.

Cas particulier d'un endomorphisme : Soit f et g deux endomorphismes de E et B une base de E .

1. $mat_B(f \circ g) = mat_B(f) mat_B(g)$
2. $\forall k \in \mathbb{N}, mat_B(f^k) = (mat_B(f))^k$.
3. $mat_B(f)$ est inversible $\Leftrightarrow f$ est un automorphisme de E et $mat_B(f^{-1}) = (mat_B(f))^{-1}$.

(**) c'est de là que provient la définition compliquée du produit matriciel

8

Exo6: Soit E un K -e-v rapporté à la base $B = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ tq $f(\vec{a}) = 4\vec{a} - 2\vec{b} - 4\vec{c}, f(\vec{b}) = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ et $f(\vec{c}) = 5\vec{a} - \vec{b} - 5\vec{c}$. Montrer que $\text{Ker}(f^2) \oplus \text{Im}(f^2) = E$.

Rappel : Formule de changement de bases pour un vecteur ou une famille de vecteurs : Si B et B' sont deux bases de E et $\vec{x} \in E$ et \mathcal{F} une famille de vecteurs de E alors

$$mat_{B'} \vec{x} = \overbrace{mat_{B'} B}^{\text{matrice de passage de } B' \text{ à } B} \times mat_B \vec{x} \quad \text{et par extension : } mat_{B'} \mathcal{F} = \overbrace{mat_{B'} B}^{\text{matrice de passage de } B' \text{ à } B} \times mat_B \mathcal{F}.$$

Formule de changement de bases pour les applicatios linéaires

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit B_1 et B_1' deux bases de l'espace vectoriel E et B_2 et B_2' deux bases de l'espace vectoriel F . Soit $M = mat_{B_1, B_2}(f)$ et $M' = mat_{B_1', B_2'}(f)$. Soit $P = mat_{B_1, B_1'}$ la matrice de passage de B_1 à B_1' et $Q = mat_{B_2, B_2'}$ la matrice de passage de B_2 à B_2' . Alors,

$$mat_{B_1', B_2'}(f) = mat_{B_2, B_2'} \times mat_{B_1, B_2}(f) \times mat_{B_1, B_1'} \quad \text{ie. } M' = Q^{-1}MP.$$

Cas d'un endomorphisme Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

Soit B et B' deux bases de l'espace vectoriel E . Soit $P = mat_B B'$ la matrice de passage de B à B' . Soit $M = mat_B(f)$ et $M' = mat_{B'}(f)$. 10 Alors, $mat_{B'}(f) = mat_{B'} B \times mat_B(f) \times mat_B B'$ ie. $M' = P^{-1}MP$.

Matrices semblables M et M' sont semblables lorsqu'il existe une matrice P inversible telle que $M' = P^{-1}MP$.

M et M' sont semblables si et seulement si M et M' sont deux matrices d'un même endomorphisme. 11

Exo7 : Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que A est semblable à $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. En déduire les puissances de A .

Caractérisation matricielle d'une projection et d'une symétrie Soit $f \in \mathcal{L}(E), B$ une base de E et $M = mat_B(f)$.

1. f est une projection vectorielle $\Leftrightarrow M^2 = M \Leftrightarrow$ il existe une base B' de E telle que $mat_{B'}(f) = diag(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$.
 $r = rg(p)$
 Dans ce cas, $\text{Im}(f)$ est l'espace engendré par les r premiers vecteurs de B' d'image non nulle et $\text{Ker}(f)$ est l'espace engendré par les autres vecteurs de B' , ceux d'image nulle.
2. f est une symétrie vectorielle $\Leftrightarrow M^2 = I \Leftrightarrow$ il existe une base B' de E telle que $mat_{B'}(f) = diag(\underbrace{1, \dots, 1}_r, -1, \dots, -1)$.
 $r = rg(p)$
 Dans ce cas, $\text{Ker}(f - id_E)$ est l'espace engendré par les r premiers vecteurs de B' et $\text{Ker}(f + id_E)$ est l'espace engendré par les autres vecteurs de B' .

12

Exo8 Soient $S = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -10 \\ -2 & 7 & 10 \\ -2 & -6 & -9 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

- On pose $P = S + Q$
- 1) Reconnaître les endomorphismes s et q de \mathbb{R}^3 canoniquement associés à S et Q . Déterminer leurs éléments caractéristique.
 - 2) Déterminer une base B' dans laquelle $mat_{B'}(s)$ et $mat_{B'}(q)$ sont diagonales.
 - 3) Qui est p l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 canoniquement associé à P ?
 - 4) Montrer que pour tout entier naturel n et pour tous réels a et b , $(ap + bq)^n = a^n p + b^n q$.
 - 5) Montrer que : $ap + bq$ est un automorphisme si et seulement si a et b sont non nuls. Déterminer $(ap + bq)^{-1}$ le cas échéant.

Déterminant d'une famille de vecteurs :

Soit $p = \dim E$ et \mathcal{B} une base de E et \mathcal{V} une famille de p vecteurs de E . Alors le déterminant de \mathcal{V} dans \mathcal{B} est $\det_{\mathcal{B}} \mathcal{V} = \det(mat_{\mathcal{B}} \mathcal{V})$ 13

Propriété de ce déterminant : Soit $p = \dim E$ et \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases de E et \mathcal{V} une famille de p vecteurs de E

1. $\det_{\mathcal{B}'} \mathcal{V} = \det_{\mathcal{B}} \mathcal{B}' \times \det_{\mathcal{B}} \mathcal{V}$
 $E^p \rightarrow K$
2. $\det_{\mathcal{B}} : \left(\mathcal{V} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p) \mapsto \det_{\mathcal{B}} \mathcal{V} \right)$ est linéaire par rapport à chacun des vecteurs.
3. \mathcal{V} base de $E \Leftrightarrow \mathcal{V}$ génératrice de E
 $\Leftrightarrow \mathcal{V}$ libre $\Leftrightarrow \det_{\mathcal{B}} \mathcal{V} \neq 0$.

14

Déterminant d'un endomorphisme :

Soit f un endomorphisme de E . Toutes les matrices de f dans différentes bases de E ont le même déterminant. $\det(f) = \det(mat_{\mathcal{B}} f)$ où \mathcal{B} une base de E 15

- Exo9:** 1) montrer que pour toute symétrie s de E , $|\det(s)| = 1$.
 2) Démontrer que $AS_n(\mathbb{R}) \oplus S_n(\mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R})$.
 3) $\forall M \in M_n(\mathbb{R}), f(M) = M^T$. Calculer $\det(f)$.

Propriétés du déterminant d'endomorphisme

Soit f et g deux endomorphismes de E et $\lambda \in K$ et $k \in K$.

1. $\det(\lambda f) = \lambda^p \det(f)$ où $p = \dim E$.
2. $\det(f \circ g) = \det(f) \times \det(g)$.
3. $\det(f^k) = (\det(f))^k$
4. f injective $\Leftrightarrow f$ surjective $\Leftrightarrow f$ bijective $\Leftrightarrow \det f \neq 0$.
5. $\det(f^{-1}) = \frac{1}{\det(f)}$
6. Il existe un vecteur \vec{x} de E non nul tel que $f(\vec{x}) = \lambda \vec{x} \Leftrightarrow \det(f - \lambda id_E) = 0$.

16

Exo10 Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 canoniquement associé à $A =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -2 & 11 & -2 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer tous les couples $(\lambda, U) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ tels $U \neq (0,0,0)$ et $f(U) = \lambda U$.
2. En déduire que A est semblable à $D = diag(-2, 7, 13)$