

Espaces vectoriels de dimension finie.

On travaille dans $(E, +, \cdot)$ un K -e.v.

Cardinal Soit \mathcal{F} une famille de vecteurs de E . $card(\mathcal{F})$, le cardinal de \mathcal{F} , est le nombre d'éléments de \mathcal{F} . Cette famille est finie lorsque $card(\mathcal{F}) \in \mathbb{N}$, sinon la famille est infinie. **1**

Dimension finie : Un K -e.v E est de dimension finie lorsque E admet au moins une famille génératrice finie. Sinon E est de dimension infinie. **2**

Cardinal d'une famille libre vs cardinal d'une famille génératrice en dimension finie *démo*
Dans un $e.v$ E de dimension finie, toute famille libre de vecteurs de E a un nombre d'éléments inférieur ou égal au nombre d'éléments de toute famille génératrice de E . **3**

Critère de dimension infinie : Si E contient une famille infinie et libre alors E est de dimension infinie. *Démo* **4**

Exemples de référence :
 $(X^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une famille libre de vecteurs de $K[X]$. Donc, $K[X]$ est donc de dimension infinie.
 $(x \rightarrow e^{kx})_{k \in \mathbb{N}}$ est une famille libre de vecteurs de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ou $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ou $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Donc, $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sont donc de dimension infinie.
 $((k^n)_{n \in \mathbb{N}})_{k \in \mathbb{N}}$ est une famille libre et infinie de vecteurs de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui est donc de dimension infinie. **5**

Dimension d'un e.v. de dimension finie *démo*
1. Tout e.v de dimension finie non réduit à $\{\vec{0}_E\}$ a une base finie.
2. Toutes les bases dans un e.v de dimension finie ont le même nombre d'éléments. Ce nombre d'éléments commun à toutes les bases est appelé la dimension de E et noté $dim(E)$.
 $dim(E)$
 $= \text{nbre de vecteurs dans une base quelconque de } E$
 $= \text{card(une base de } E) = \text{card(toute base de } E)$.
3. Par convention, $dim\{\vec{0}_E\} = 0$. **6**

Exemples de référence :
Une droite vectorielle est un e.v de dimension 1.
Si P est le \mathbb{R} - e - v des vecteurs du plan, alors $dim_{\mathbb{R}} P = 2$
Un plan vectoriel est un e.v de dimension 2.
Si E est le \mathbb{R} - e - v des vecteurs de l'espace géométrique alors $dim_{\mathbb{R}} E = 3$
 $dim_K K = 1$ et $dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 2$.
 $dim_K K^n = n$.
 $dim_K M_{n,p}(K) = np$.
 $dim_K K_n[X] = n + 1$. **7**
Soit a fonction continue sur I . La dimension de l'ensemble des sol^o de l'équa. diff. $y' - a(x)y = 0$ est 1.
Soit a et b réels fixés. La dimension de l'ensemble des sol^o de l'équa. diff. $y'' + ay' + by = 0$ est 2.
Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Le K -e.v de suites p - périodiques de dimension p .

Le K -e.v des suites arithmétiques est de dimension 2.
Soit $r \in \mathbb{R}^{**}$. Le K -e.v des suites géométriques de raison r est de dimension 1.
Soit a et b réels fixés. Le K -e.v des suites vérifiant: $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0$ est de dimension 2. **8**

Cardinal d'une famille libre ou génératrice *démo*
Soit E un K -e.v de dimension finie $n = dim(E)$.
1. Une famille libre de vecteurs de E a au plus n éléments.
2. Une famille génératrice de E a au moins n éléments. **9**

Caractérisation d'une BASE en dimension finie. *démo*
Soit E un K -e.v de dimension finie $n = dim(E)$. Soit \mathcal{F} une famille de vecteurs de E .
• \mathcal{F} est une base de E **sietssi** \mathcal{F} est libre et $card(\mathcal{F}) = dim(E)$ (on dit alors que \mathcal{F} est libre et maximale).
• \mathcal{F} est une base de E **sietssi** \mathcal{F} est génératrice de E et $card(\mathcal{F}) = dim(E)$ (on dit alors que \mathcal{F} est génératrice et minimale). **10**
base = libre et maximale = génératrice et minimale

Exercice 1: Soit n un entier naturel. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $deg(P) = n$. Montrer que $(P, P', P'', \dots, P^{(n)})$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Théorème de complétion et d'extraction : *démo*
Soit E un K -e.v de dimension finie n .
1) Toute famille libre de vecteurs de E de cardinal p peut être complétée par $n - p$ vecteurs de E bien choisis pour obtenir une base de E . Ces $n - p$ vecteurs de E peuvent être choisis parmi les vecteurs d'une base connue de E .
2) De toute famille génératrice de E , on peut extraire n vecteurs qui forment une base de E . **11**

Exercice 2: Montrer que $\mathcal{F} = \left(\frac{1+X+X^2}{p}, \frac{2X-X^2}{0}, \frac{3+X}{r}, \frac{1-2X^2}{s} \right)$ est génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$ et en extraire une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Matrice d'une famille de vecteurs Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ une base d'un K -e.v E et $\mathcal{V} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p)$ une famille de vecteurs de E . $\forall j \in \{1, \dots, p\}$, notons $(\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \dots, \alpha_{nj})$ les composantes de \vec{v}_j dans \mathcal{B} i.e. $\vec{v}_j = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} \vec{e}_i$. Alors la **matrice de la famille \mathcal{V} dans la base \mathcal{B}** , notée $mat_{\mathcal{B}} \mathcal{V}$, est la matrice de type (n, p) définie par :

$$mat_{\mathcal{B}} \mathcal{V} = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \dots & \vec{v}_p \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1p} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{np} \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vdots \\ \vec{e}_n \end{matrix}$$

Composantes et linéarité Soit \mathcal{B} une base finie de E .
1. $\Delta: \left(\begin{matrix} E \rightarrow M_{n,1}(K) \\ \vec{x} \rightarrow mat_{\mathcal{B}} \vec{x} \end{matrix} \right)$ est une bijection.
2. Soit \vec{x} et \vec{y} deux vecteurs de E , α, β deux scalaires. Alors $mat_{\mathcal{B}}(\alpha \vec{x} + \beta \vec{y}) = \alpha mat_{\mathcal{B}} \vec{x} + \beta mat_{\mathcal{B}} \vec{y}$.
3. Soit $\mathcal{V} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p)$ une famille de vecteurs de E . \vec{x} est combinaison linéaire de $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p$ si et ssi $mat_{\mathcal{B}} \vec{x}$ est combinaison linéaire des matrices $mat_{\mathcal{B}} \vec{v}_k$. Et dans ce cas, les coefficients des combinaisons linéaires sont les mêmes. **13**

Formule de changement de base pour les vecteurs *démo*
Soit \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 deux bases de E . Soit \vec{v} un vecteur de E . Soit $P = mat_{\mathcal{B}_2} \mathcal{B}_1$ et $X_1 = mat_{\mathcal{B}_1}(\vec{v})$ et $X_2 = mat_{\mathcal{B}_2}(\vec{v})$. Alors, $mat_{\mathcal{B}_2}(\vec{v}) = mat_{\mathcal{B}_2} \mathcal{B}_1 \times mat_{\mathcal{B}_1}(\vec{v})$ i.e. $X_2 = P X_1$. **14**

Exercice 3 : Soit $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base d'un K -e.v E . Soit $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{v} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{w} = \vec{i} - \vec{j}$. La famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est-elle une base de E ? Si oui, quelles sont les composantes de $\vec{n} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ dans cette base ?

Caractérisation matricielle d'une base.
Soit \mathcal{B} une base de E et \mathcal{V} une famille de vecteurs de E . \mathcal{V} est une base de E **sietssi** $mat_{\mathcal{B}} \mathcal{V}$ est inversible. Et le cas échéant, $(mat_{\mathcal{B}} \mathcal{V})^{-1} = mat_{\mathcal{B}} \mathcal{V}$. **15**

Exercice 4 :
1. Montrer que la famille $\left(\begin{matrix} -1 & 2 \\ 2i & -1+i \end{matrix} \right), \left(\begin{matrix} i & -2i \\ 2 & 1 \end{matrix} \right)$ est libre et la compléter pour constituer une base de $M_2(\mathbb{C})$.
2. Pour quelles valeurs du réel a , la famille $\mathcal{F} = \left(\begin{matrix} a & 1 & 2 & 3 \\ \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 & \vec{u}_4 \end{matrix} \right), \left(\begin{matrix} 0 & a & 4 & 3 \\ \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 & \vec{u}_4 \end{matrix} \right), \left(\begin{matrix} 0 & 1 & a & 3 \\ \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 & \vec{u}_4 \end{matrix} \right), \left(\begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3a \\ \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 & \vec{u}_4 \end{matrix} \right)$ est-elle libre ?

Matrice de passage Si \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 sont deux bases de E alors $mat_{\mathcal{B}_2} \mathcal{B}_1$ est appelée la **matrice de passage de la base \mathcal{B}_1 à la base \mathcal{B}_2** . Et $(mat_{\mathcal{B}_2} \mathcal{B}_1)^{-1} = mat_{\mathcal{B}_1} \mathcal{B}_2$. **16**

Propriété d'une matrice de passage *démo*
Toute matrice de passage est inversible et réciproquement, toute matrice inversible est la matrice de passage entre deux bases de E . **17**

Rang d'une famille de vecteurs Soit $\mathcal{V} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p)$ une famille de vecteurs d'un K -e.v E . (E n'est pas forcément de dimension finie)
Le **rang de \mathcal{V}** , noté $rg(\mathcal{V})$, est la dimension du sous-espace vectoriel engendré par \mathcal{V} .
Autrement dit, $rg(\mathcal{V}) = dim_K(vect(\mathcal{V}))$ **18**

Exercice Déterminer le rang de $\mathcal{F} = (f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)$ et extraire de \mathcal{F} une base de $\text{vect}(\mathcal{F})$ où $f_0 = \text{ch}$, $f_1 = \text{sh}$, $f_2 = \exp$, $f_3: (x \mapsto \text{ch}(2x))$ et $f_4: (x \mapsto \text{sh}^2(x))$, $f_5: (x \mapsto e^{-x})$ et $f_6: (x \mapsto \text{ch}^2(x))$.

Propriété du rang. *démo*
 Soit \mathcal{V} une famille de vecteurs de E .
 $\text{rg}(\mathcal{V}) \leq \min(\text{dim}E, \text{card}(\mathcal{V}))$.
 1) \mathcal{V} est libre **sietssi** $\text{rg}(\mathcal{V}) = \text{card}(\mathcal{V})$
 Si, de plus, E est de dimension finie, alors
 2) \mathcal{V} est génératrice de E **sietssi** $\text{rg}(\mathcal{V}) = \text{dim}E$
 3) \mathcal{V} est base de E **sietssi** $\text{rg}(\mathcal{V}) = \text{card} \mathcal{V} = \text{dim}E$. **19**

Caractérisation matricielle du rang *démo*
 1. Le rang d'une matrice est le rang de la famille définie par ses colonnes.
 2. Si E est un K -e-v de dimension finie alors pour toute base \mathcal{B} de E et toute famille \mathcal{V} de vecteurs de E ,
 $\text{rg}(\mathcal{V}) = \text{rg}(\text{mat}_{\mathcal{B}} \mathcal{V})$. **20**

Conséquences : Ici E est de dimension finie. Soit \mathcal{B} est une base de E , \mathcal{V} est une famille de vecteurs de E et
 $M = \text{mat}_{\mathcal{B}} \mathcal{V}$.
 \mathcal{V} est libre **sietssi** $\text{rg}(M) = \text{card}(\mathcal{V})$
 \mathcal{V} est génératrice de E **sietssi** $\text{rg}(M) = \text{dim}E$
 \mathcal{V} est base de E **sietssi** $\text{rg}(M) = \text{card} \mathcal{V} = \text{dim}E$. **21**

Exercice Quel est le rang de \mathcal{F} ? et donner une base de $\text{vect}(\mathcal{F})$ où
 $\mathcal{F} = (1, 1, 2, 3), (1, -3, 2, 0), (4, 0, 8, 9), (1, 0, 3, -1), (2, -6, 4, 9)$

Sous-e-v d'un e-v de dim finie *démo*
 Soit E un K -e-v de dimension finie. Alors, tout ss-e-v F de E est de dimension finie et $\text{dim}(F) \leq \text{dim}(E)$. De plus,
 $\text{dim}(F) = \text{dim}(E) \Leftrightarrow F = E$. **22**

Caractérisation par les bases de ss-e-v supplémentaires *démo*
 Soit F et G deux ss-e-v d'un K -e-v E .
 Soit $B_1 = (\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_p)$ une base du ss-e-v F de E et $B_2 = (\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_q)$ une base du ss-e-v G de E alors
 $E = F \oplus G$ **sietssi** $(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_p, \vec{g}_1, \dots, \vec{g}_q)$ est une base de E **23**
Conséquences :
 • Si $E = F \oplus G$ avec F et G de dimension finie, alors E est de dimension finie et $\text{dim}E = \text{dim}F + \text{dim}G$ ET toute FAMILLE obtenue par concaténation d'une base de F et d'une base de G est **une base de E dite adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$.**
 • Si $E = F \oplus G$ et E est de dimension infinie, alors F ou/et G est de dimension infinie. **24**

Existence d'un supplémentaire en dim finie *démo*
 Soit E un K -e-v de dimension finie. Tout ss-e-v de E de dimension finie admet un supplémentaire dans E .

Exercice : Soit $F = \{A = (a_{ij})_{(i,j) \in \llbracket 1,3 \rrbracket^2} \in M_3(\mathbb{R}) / \forall i \in \llbracket 1,3 \rrbracket, \sum_{j=1}^3 a_{ij} = 0\}$.
 Montrer que F est un ss-e-v de $M_3(\mathbb{R})$ et déterminer un ss-e-v de $M_3(\mathbb{R})$ supplémentaire de F dans $M_3(\mathbb{R})$.

Formule de Grassmann: *démo*
 Soit E un K -e-v de dimension finie.
 Si F et G sont deux sous-e-v quelconques de E alors
 $\text{dim}(F + G) = \text{dim}F + \text{dim}G - \text{dim}(F \cap G)$. **25**

Caractérisation de ss-e-v supplémentaires *démo*
 Soit E un K -e-v de dimension finie, F et G deux sous-e-v de E .
 $E = F \oplus G$ **sietssi** $\begin{cases} F \cap G = \{\vec{0}_E\} \\ \text{dim}(F) + \text{dim}(G) = \text{dim}(E) \\ F + G = E \end{cases}$
sietssi $\begin{cases} \text{dim}(F) + \text{dim}(G) = \text{dim}(E) \end{cases}$. **26**

Exercice: Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] / P(1) = P'(1) = 0\}$.
 Montrer que $\mathbb{R}_n[X] = \mathbb{R}_1[X] \oplus F$.