

TD 18

Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels. Familles libres-génératrices-bases .

I Sous-espace vectoriel . Famille génératrice

Ex 1 vect(...)

- Montrer que $\text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.
- Soit $P(X) = 1 + 2X + X^2$, $Q(X) = 2 - X - 2X^2$ et $R(X) = -1 + 2X + kX^2$.
Déterminer les réels k tels que : $\text{vect}(P, Q) = \text{vect}(P, Q, R)$.

Ex 2 Espace vectoriel quelconque

Soit $(E, +, \cdot)$ un $K - e - v$.

- Soit F et G deux ss-e-v d'un $K.e.v$ E tq : F et G distincts de E et de $\{\vec{0}_E\}$.
 $E \setminus F$ est-il un ss-e-v de E ? $E \setminus F \cup \{\vec{0}_E\}$ est-il un ss-e-v de E ? $(F \cup G)$ est-il un ss-e-v de E ?

- Soit F un ss-e-v de E et \vec{x} et \vec{y} deux vecteurs de E .

Montrer que : $F + \text{vect}(\vec{x}) = F + \text{vect}(\vec{y})$ si et seulement si il existe $\vec{z} \in F$ et $(a, b) \in K^2$ tels que $ab \neq 0$ et $\vec{z} + a\vec{x} + b\vec{y} = \vec{0}_E$

- Soit $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ une famille de vecteurs de E .

- Soit F un ss-e-v de E contenant $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p$. Quelle propriété fondamentale de F justifie $\text{vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p) \subset F$?
- Soit $F = \{\alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \dots + \alpha_p \vec{u}_p / (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in K^p\}$ et $G = \{\alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \dots + \alpha_p \vec{u}_p / (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in K^p \text{ et } \alpha_1 + \dots + \alpha_p = 0\}$. Lequel de ces deux ensembles F ou G est $\text{vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$? Justifier. Quelle relation y-a-t-il entre F et G ?
- Montrer que F et G sont deux ss-e-v de E et en donner des familles génératrices.
- Donner une écriture de \vec{u}_2 puis de $\vec{0}$ comme combinaison linéaire de $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p$. Ces écritures sont-elles uniques ? A quelle condition sur \mathcal{F} , cette écriture est-elle unique ?
- Compléter et justifier : $\text{vect}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p, \vec{w}) = \text{vect}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ si et seulement si $\vec{w} \dots \dots \dots$
- Déterminer plusieurs familles génératrices de F et de G .

- Remplir avec l'un des symboles suivants : \Rightarrow, \Leftarrow ou \Leftrightarrow :

- Soit x, y et z des vecteurs de E . Alors, (x, y, z) liée $\dots \dots \dots x \in \text{vect}(x, y)$.
- Soit A et B deux parties de E . $A \subset B \dots \dots \dots \text{vect}(A) \subset \text{vect}(B)$.
- Soit F et G deux ss-e-v de E . $F \cup G$ ss-e-v $\dots \dots \dots F \subset G$.
- Soit F et G deux ss-e-v de E . $F + G = G \dots \dots \dots F \subset G$.

Ex 3 Ensembles de fonctions

Barrer dans la liste suivante les ensembles F qui ne sont pas des ss-e-v. Expliquer pourquoi ils n'en sont pas et pourquoi les autres sont des ss-e-v. Dans les cas (*), chercher une famille génératrice puis une base et la dimension de F . On précisera quand F est un plan ou une droite vectoriel(le).

- $F = \{(x \mapsto (ax^2 + bx + c)\cos(x)) / a, b, c \text{ réels}\}$ (*)
- $F = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(1) = f(2)^2\}$
- $F = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(1) = f'(1) - 3f(2)\}$
- $F = \{(x \mapsto \tilde{P}(x)\cos(x) + \tilde{Q}(x)\sin(x)) / (P, Q) \in \mathbb{R}_2[X]\}$ (*)
- F est l'ensemble des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} réelles et constantes (*)
- Soit L un réel fixé. F est l'ensemble des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} de limite L en $+\infty$.
- $F = \{f \in C^1([-1, 0], \mathbb{R}) / \forall x \in \mathbb{R}, (x^3 - 1)f'(x) = xf(x)\}$ (*)
- $F = \{f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / \exists (a, b, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^4, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a\cos(x - \alpha) + b\cos(x - \beta)\}$ (*)
- Soit φ une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . F est l'ensemble des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} négligeables devant φ au voisinage de 0.
- $F = \{f \in C^0([-1, 1], \mathbb{R}) / f|_{[-1, 0]} \text{ et } f|_{[0, 1]} \text{ sont affines}\}$ (*)

Ex 4 Ensembles de n-uplets Mêmes questions....

- $F = \{x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1) / (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ et } xz = y\}$
- $F = \left\{ (x, y, z, t, w) \in \mathbb{R}^5 / \begin{cases} 2x + y + 3z + t - 2w = 0 \\ 3x - y + z + 2t + w = 0 \\ 5x - 2y - z + t + 3w = 0 \end{cases} \right\}$ (*)
- Soit $n \geq 3$ et $F = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / \sum_{k=1}^n kx_k = \sum_{k=1}^n x_k = 0\}$ (*)
- $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x - y)^2 = (x + y)^2\}$.
- $F = \{(a - b, a + 3b + c, c - a) \in \mathbb{R}^3 / a, b, c \text{ réels}\}$ (*)

Ex 5 Ensembles de vecteurs de l'espace géométrique E Mêmes questions....

Soit $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ trois vecteurs de E non coplanaires (ils forment donc une base de E)

- $F = \{\vec{u} \in E / \exists (\mu, \gamma) \in \mathbb{R}^2; \vec{u} = \mu\vec{i} + \gamma\vec{j}\}$ (*)
- $F = \{a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} / (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \text{ et } a + b + c = 0\}$ (*)
- $D = \{a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} / (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \text{ et } \begin{cases} 2a - b + c = 0 \\ a + 4b - 2c = 0 \end{cases}\}$ (*)

- Soit t un réel. $F_t = \{a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} / (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \text{ et } a + b + c = t\}$
- $F = \{a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} / (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \text{ et } a^2 + bc = 0\}$
- Soit a un réel fixé. $F_a = \{\vec{u} \in E / \underbrace{\vec{u}, \vec{i}}_{\substack{\text{produit} \\ \text{scalaire}}} = a\}$.

Ex 6 Ensembles de suites Mêmes questions....

- Soit a un réel fixé. F est l'ensemble des suites réelles vérifiant : $\forall n, u_{n+2} + u_{n+1} + u_n = a$. (*)
- F est l'ensemble des suites vérifiant : $\forall n, u_{n+1} = u_n^2$.
- F est l'ensemble des suites complexes et bornées.
- Soit u une suite réelle fixée. F est l'ensemble des suites équivalentes à u .
- F est l'ensemble des suites majorées par leur premier terme.
- F est l'ensemble des suites somme d'une suite croissante et d'une suite décroissante.
- F est l'ensemble des suites périodiques.

Ex 7 Ensembles de polynômes Mêmes questions.... Soit $n \in \mathbb{N}$.

- $F = \{a + (a + b + c)X + (2c - b)X^2 / a, b, c \text{ réels}\}$. (*)
- $F = \{a + bX + cX^2 + dX^3 / a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ et } \begin{cases} a + b - c + 2d = 0 \\ 2a + b - c + d = 0 \end{cases}\}$. (*)
- $F = \{P \in \mathbb{R}[X] / (X^2 + 1)P'' - 6P = 0\}$. (*)
- F est l'ensemble des polynômes de degré 5.
- F est l'ensemble des polynômes constants. (*)
- $F = \{P \in \mathbb{R}[X] / P(1) = P''(1) = 1\}$.
- $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] / \int_0^1 \tilde{P}(t) dt = 0\}$. (*)
- $F = \{P \in \mathbb{R}_5[X] / \tilde{P}(1) = \tilde{P}(-1) = \tilde{P}'(-1)\}$. (*)
- $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] / \tilde{P}(3) + 2\tilde{P}''(3) = \tilde{P}'(3)\}$. (*)
- $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] / P(X+1) = P(X)\}$. (*)
- $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] / XP(X+1) = (X+3)P(X)\}$. (*)
- $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] / \sum_{k=0}^n P^{(k)}(0) = 0\}$. (*)

Ex 8 Ensembles de matrices Mêmes questions.... Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

- $F = \left\{ \begin{pmatrix} x+y & y+z & x+z \\ -y & z & -x \end{pmatrix} / (x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \right\}$ (*)
- $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / (a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4, \begin{cases} a+d = b-c \\ 2a+3b = c+d \end{cases} \right\}$ (*)
- Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $F = \{M \in M_n(\mathbb{R}) / AM = MA\}$ ((*) dans le cas où $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$).
- F est l'ensemble des matrices complexes carrées d'ordre 2 de déterminant nul.
- Soit $A \in M_n(K)$ et $F = \{M \in M_n(\mathbb{R}) / \exists P \in GL_n(K), M = PAP^{-1}\}$ (F est l'ensemble des matrices semblables à A).
- $F = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} / xy = 0 \right\}$ puis $F = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} / xy \neq 0 \right\}$
- $F = S_3(\mathbb{R})$ (*) puis $F = A_3(\mathbb{R})$ (*) puis F est l'ensemble des matrices réelles, carrées d'ordre n et diagonales (resp triangulaires inférieures) (*)
- F est l'ensemble des matrices carrées d'ordre n nilpotentes.

II Somme, intersection, supplémentaires, somme directe or nothing...

Ex 9 dans K^n

- Soit $F = \{(a + 2b, a, 2a + b, b) / (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ et $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x - z = 0 \text{ et } x + y - t = 0\}$
 - Montrer que F et G sont deux plans vectoriels de \mathbb{R}^4 .
 - Justifier que F et G sont supplémentaires dans \mathbb{R}^4 .
 - Ecrire $X = (1, 2, 3, 4)$ comme somme d'un élément de F et d'un élément de G .
- $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \text{vect}((1, 1, \dots, 1, 1))$ et $G = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / \sum_{k=1}^n x_k = 0\}$.
 - Justifier que F et G sont des ss-e-v de E et en déterminer une famille génératrice puis une base.
 - Montrer que F et G sont supplémentaires dans E .
- Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - 2z = 0\}$ et $G = \{(a, 3a, b) / (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$
 - Montrer que G et F sont deux plans vectoriels. On en donnera une base et on donnera une équation de G .
 - Donner une famille génératrice de $F + G$, de $F \cap G$.
 - Trouver un vecteur $X \in G$ tel que F et $\text{vect}(X)$ sont supplémentaires dans \mathbb{R}^3 .
- Soit $F = \{(x, y, z, t, w) \in \mathbb{R}^5 / \begin{cases} 3x - y + z - t + w = 0 \\ 2x - y - 2z - t - w = 0 \end{cases}\}$ et $G = \{(a, a + 2b, b - a, 2a + b, a + b) / (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.
 - Montrer que F et G sont deux ss-e-v de \mathbb{R}^5 . F et G sont-ils supplémentaires dans \mathbb{R}^5 ?
 - Montrer que $F = \text{vect}((-2, -6, 0, 1, 1), (3, 9, -1, -1, 0), (1, 4, -1, -1, 1))$
 - Pour quelles valeurs du réel x , $(2x, 0, 3, -3, x) \in G$?
 - Donner un système d'équations décrivant G (comme pour F).

Ex 10 dans $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$

- Soit E l'espace vectoriel des applications de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} continues sur $[0, 1]$. Soit F l'ensemble des applications de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} constantes et $G = \{f \in C^0([0, 1], \mathbb{R}) / \int_0^1 f(t) dt = 0\}$
 - Justifier que F est une droite vectorielle.
 - Montrer que F et G sont deux ss-e-v de E supplémentaires dans E . Que peut-on alors dire de G ?
 - Décomposer $(x \mapsto x^2 \ln(1 + x))$ comme somme d'un élément de F et d'un élément de G .

2. Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, $E = C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $F = \{f \in E / f(0) = f'(0) = 0\}$, G l'ensemble des applications affines et H l'ensemble des applications polynomiales de degré inférieur ou égal à n et $V = \text{vect}(ch, sh)$
- Montrer que F , G et H sont des ss-e-v de E tels que $F \oplus G = E$ et $F \oplus V = E$.
 - Déterminer $f \in F$ et $g \in G$ telles que $\exp = f + g$. Donner une expression intégrale à f .
 - Déterminer une base de G et une base de H .
 - Décrire $F \cap H$ et $G \cap H$. Montrer que $(F \cap H) \oplus G = H$.

Ex 11 dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

- Soit $p \in \mathbb{N}$ et $F = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \forall n, u_{n+4} = u_n\}$ et $G = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / u_3 = u_2 = u_1 = u_0 = 0\}$.
 - Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ supplémentaires dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
 - Déterminer une base de F .
- Soit $E = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 3u_{n+1} + 2u_n\}$, $F = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + 2u_{n+1} + u_n = 0\}$ et G l'ensemble des suites géométriques de raison 2.
 - Montrer que E est un \mathbb{R} -e-v.
 - Montrer que F est un plan vectoriel de E et G une droite vectorielle de E .
 - Prouver que F et G sont supplémentaires dans E . En déduire une famille génératrice de E .
 - Si l'on définissait une équation caractéristique de E , quelle serait-elle ? Quelles seraient ses solutions ? Est-ce cohérent avec le résultat de la question 3. et le cours sur les suites récurrentes d'ordre 2 ?

Ex 12 dans $\mathbb{R}[X]$ ou de $\mathbb{R}_n[X]$.

- Soit $F = \{aX + bX^2 / a, b \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{P \in \mathbb{R}_3[X] / \tilde{P}(1) = \tilde{P}'(2) = 0\}$. Montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}_3[X]$.
- Soit Q un polynôme réel fixé non nul et de degré p . Soit F l'ensemble des polynômes divisibles par Q . Montrer que F et $\mathbb{R}_{p-1}[X]$ sont deux sous-e-v supplémentaires dans $\mathbb{R}[X]$.
- $F = \{P \in \mathbb{R}[X] / \tilde{P}(1) = 0\}$ et $G = \{aX / a \in \mathbb{R}\}$.
 - Montrer que G est une droite vectorielle.
 - Montrer que F et G sont supplémentaires dans E .
 - Donner un sous espace vectoriel de E qui ne soit pas supplémentaire de F dans $\mathbb{R}[X]$.
 - Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner une famille génératrice de $F \cap \mathbb{R}_n[X]$.
- Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ et $F = \{P \in \mathbb{R}[X] / P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)\}$ et $G = \{P \in \mathbb{R}_n[X] / \tilde{P}(1) = \tilde{P}'(0)\}$.
 - Montrer que F est un ss-e-v de $\mathbb{R}[X]$ et en trouver une base de F . Idem pour G .
 - Montrer que F et G sont deux ss-e-v de $\mathbb{R}_n[X]$ supplémentaires dans $\mathbb{R}_n[X]$.
- Parmi les ss-e suivants, lesquels sont supplémentaires de l'espace des polynômes pairs de $\mathbb{R}[X]$?
 - l'espace des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ impairs
 - $\{P(X) + X^2 / P \in \mathbb{R}[X] \text{ impair}\}$
 - $\{P \in \mathbb{R}[X] / P(1) = 0\}$
 - $\text{Vect}((X^{3n})_{n \in \mathbb{N}})$.

Ex 13 dans $M_n(\mathbb{R})$.

- $E = M_n(\mathbb{R})$. Soit F l'ensemble des matrices de E de trace nulle.
 - Démontrer que F et $\text{vect}(I_n)$ sont deux sous-e-v de $M_n(\mathbb{R})$ supplémentaires dans $M_n(\mathbb{R})$.
 - Trouver une base de F .
- Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $F = \{M \in M_3(\mathbb{R}) / AM = O_3\}$ et $G = \{M \in F / AM = MA\}$.
 - Montrer F est un ss-e-v de $M_3(\mathbb{R})$ et G est un ss-e-v de F . Trouver une base de F et une base de G .
 - A est-elle inversible ? Les éléments de F sont-ils inversibles ?
 - Déterminer toutes les matrices M de F telles que $A + M$ est inversible.
 - Prouver que F et G sont stables par produit matriciel.
- Soit $D = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $F = \{M \in M_2(\mathbb{R}) / DM = MD\}$. Soit (e) l'équation $M^3 = D$ d'inconnue $M \in M_2(\mathbb{R})$.
 - Montrer que F est un ss-e-v de $M_2(\mathbb{R})$ et en trouver une base.
 - Monter que si M est solution de (e) alors $M \in F$. En déduire les solutions de (e).

III Familles libres, familles liées. Bases.

Ex 14 Liberté ou liaison d'une famille de fonctions

- Soit, $f_0 = 2$, $f_1 : (x \mapsto \ln(3x))$, $f_2 : (x \mapsto \frac{1}{x})$, $f_3 : (x \mapsto \ln(9x))$, $f_4 : (x \mapsto \frac{1}{x^2+x})$, $f_5 : (x \mapsto \frac{1}{x+1})$, $f_6 : (x \mapsto \frac{\ln(x)}{x})$. Déterminer une base de $\text{vect}(f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)$.
- Soit $a \in \mathbb{R}$, $f_1 = \sin$, $f_2 : (t \mapsto \sin(t+a))$ et $f_3 : (t \mapsto \cos(t+a))$. (f_1, f_2, f_3) est-elle libre ?
- Soit $f_1 = \exp$, $f_2 : (t \mapsto \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t) e^{-\frac{t}{2}})$ et $f_3 : (t \mapsto \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) e^{-\frac{t}{2}})$ et $G = \text{vect}(f_1, f_2, f_3)$.
 - Soit a, b, c trois réels tels que $af_1 + bf_2 + cf_3 = 0$. Montrer que $a = b = c = 0$ par deux méthodes.
 - Prendre des valeurs de t et conclure.
 - Utiliser un développement limité de $af_1 + bf_2 + cf_3$ au voisinage de 0 et conclure.

b. Quelle est $\dim(G)$?

c. Soit $F = \{f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / f'' + f' + f = 0\}$. Montrer que $G = F \oplus \text{vect}(f_1)$.

d. Déterminer une base de $\text{vect}(g_1, g_2, g_3, g_4)$ où

$$g_1: (t \rightarrow 3e^{-\frac{t}{2}}(\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t) - 2\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t)))$$

$$g_3: (t \rightarrow e^{-\frac{t}{2}}(2\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t) + \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t)) + e^{3t/2})$$

$$g_2: (t \rightarrow e^t - e^{-\frac{t}{2}}(\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t)))$$

$$g_4: (t \rightarrow e^{-\frac{t}{2}}(-\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t) + 3\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t)) + 4e^t).$$

4. Montrer que ces familles sont libres

a. $\forall k \in \mathbb{N}$, on pose, $f_k: (x \rightarrow \text{Arctan}^k(x))$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(f_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est libre.

b. $\forall k \in \mathbb{N}$, on pose $h_k: (x \rightarrow \cos(kx))$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(h_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est libre.

c. $\forall a \in I$, on pose $f_a: (x \rightarrow x^a)$. Soit a_1, a_2, \dots, a_n des réels distincts Montrer que la famille $(f_{a_1}, f_{a_2}, \dots, f_{a_n})$ est libre dans $C^\infty(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$.

d. $\forall a \in \mathbb{R}$, on pose $\varphi_a: (x \rightarrow \sqrt{|x-a|})$. Soit a_1, a_2, \dots, a_n des réels distincts.

Montrer que la famille $(\varphi_{a_1}, \varphi_{a_2}, \dots, \varphi_{a_n})$ est libre dans $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

e. $\forall a \in \mathbb{R}$, on pose $\varphi_a: (x \rightarrow \begin{cases} 1 & \text{si } x = a \\ 0 & \text{si } x \neq a \end{cases})$. Soit a_1, a_2, \dots, a_n des réels distincts. Montrer que la famille $(\varphi_a)_{a \in I}$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

f. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $f_k: (t \mapsto e^{kt})$. Montrer que (f_0, f_1, \dots, f_n) est libre.

Ex 14 Famille de polynômes.

1. Etudier la liberté de la famille (P_1, P_2, \dots, P_5) tel que $P_1 = 1 - 2X + X^3, P_2 = -2X - X^4, P_3 = X^2 - 2X^3 + 2X^4, P_4 = 3 + 2X - 3X^4, P_5 = 1 - X^2 - X^3 - X^4$.

2. Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tq $a \neq b$ et $n \in \mathbb{N}$. F l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_4[X]$ admettant a et b comme racines

a. Montrer que F est un ss-e-v de $\mathbb{R}_4[X]$ et en déterminer une base.

b. Montrer que la famille $((X+a)^{n-k}(X+b)^k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est libre.

3. Déterminer une \mathbb{R} -base du \mathbb{R} -e-v $\mathbb{C}_3[X]$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ tq $\deg(P) = n$. Justifier que $(P, P', \dots, P^{(n)})$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

5. Montrer que $(1, X, (X+1), (X+2), \dots, (X+n-1))_{n \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$ et a_0, a_1, \dots, a_n des réels tous distincts.

a. Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Déterminer l'unique polynôme $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket \setminus \{i\}, \tilde{L}_i(a_k) = 0$ et $\tilde{L}_i(a_i) = 1$.

d. Montrer que (L_0, \dots, L_n) est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Donner les composantes du polynôme constant 1 dans cette base.

Exemple : Soit $n \in \mathbb{N}$ et pose pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket, L_i(X) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{X-k}{i-k}$. Montrer que la famille $(L_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est une base de

$\mathbb{R}_n[X]$. Quelles sont les composantes du polynôme 1 puis de X dans cette base ?

e. En déduire que $\varphi: \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ définie par : $\varphi(P) = (\tilde{P}(a_0), \tilde{P}(a_1), \dots, \tilde{P}(a_n))$ est bijective.

f. On définit $F = \{f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / f \text{ polynomiale et } \deg(f) \leq n\}$ et $G = \{f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / f(a_0) = f(a_1) = \dots = f(a_n) = 0\}$. Montrer que F et G sont deux ss-e-v de $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ supplémentaires dans $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 15 Famille de suites.

1. Montrer que la famille de suites (u, v, w, z) est libre lorsque :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \ln^2(n+1), v_n = \sqrt{n}, w_n = (-1)^n, z_n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n.$$

2. $\forall k \in \mathbb{N}, v_k = (n^k)_{n \in \mathbb{N}}$ (on note $v_k(n) = n^k$). Soit $m \in \mathbb{N}$. Montrer que (v_0, v_1, \dots, v_m) est une famille libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

3. Déterminer est une base du \mathbb{C} -e-v des suites complexes 4-périodiques.

4. Soit $u = (1, 10, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, \dots), v = (0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, \dots), w = (1, 0, 0, 2, 1, 0, 0, 2, 1, 0, 0, 1, 2, 0, \dots)$ et $t = (0, 0, 3, 1, 0, 0, 3, 1, 0, 0, \dots)$. Montrer que (u, v, w, t) est une base du \mathbb{C} -e-v des suites 4-périodiques.

Exercice 16 Dans un K-e-v E de dimension quelconque.

1. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $\mathcal{L} = (\vec{u}_i)_{i=1..n}$ une famille libre de vecteur d'un K- espace vectoriel E .

a. Etudier la liberté de la famille $\mathcal{F} = (\vec{u}_1 + \vec{u}_2, \vec{u}_2 + \vec{u}_3, \dots, \vec{u}_{n-1} + \vec{u}_n, \vec{u}_1 + \vec{u}_n)$.

b. Soit $p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ Justifier que $\text{vect}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ et $\text{vect}(\vec{u}_{p+1}, \dots, \vec{u}_n)$ sont en somme directe.

c. Soit F et G deux ss-e-v de E tels que : $F \oplus G = E$ et $G = \text{vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$. Soit $\vec{a} \in F$ et

$$G_a = \text{vect}(\vec{a} + \vec{u}_1, \vec{a} + \vec{u}_2, \dots, \vec{a} + \vec{u}_p). \text{ Montrer que } G_a \text{ et } F \text{ sont supplémentaires dans } E.$$

2. Justifier que G_a est de dimension finie et déterminer sa dimension.

3. Ici E est de dimension finie p, de base $\mathcal{B} = (\vec{e}_i)_{i=1..p}$. On pose : $\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \vec{e}_i = \vec{e}_i - (\vec{e}_{i+1} + \vec{e}_{i+2} + \dots + \vec{e}_p)$ et $\vec{e}_p = \vec{e}_p$. Montrer que $\mathcal{B}' = (\vec{e}_i)_{i=1..p}$ est une base de E . Soit $\vec{x} \in E$. Exprimer les composantes de \vec{x} dans la base \mathcal{B}' en fonction les composantes de \vec{x} dans B.

TD 19

Familles libres -génératrices -bases-dimension.

Exercice 1 Dans des ensembles de fonctions

1. Déterminer le rang de $(ch, sh, f: (x \mapsto 1), g: (x \mapsto ch(2x)), ch^2, sh^2)$
2. Soit $f_1 = \exp$, $f_2: (t \mapsto \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t) e^{-\frac{t}{2}})$ et $f_3: (t \mapsto \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) e^{-\frac{t}{2}})$. Et $F = \text{vect}(f_1, f_2, f_3)$
 - a. Déterminer la dimension de F .
 - b. Déterminer le rang de la famille $\mathcal{G} = (g_1, g_2, g_3, g_4)$ où

$g_1: (t \mapsto 3e^{-\frac{t}{2}}(\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t) - 2\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t)))$	$g_3: (t \mapsto e^{-\frac{t}{2}}(2\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t) + \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t)) + e^{3t/2})$
$g_2: (t \mapsto e^t - e^{-\frac{t}{2}}(\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t)))$	$g_4: (t \mapsto e^{-\frac{t}{2}}(-\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t) + 3\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t)) + 4e^t)$

Exercice 2 Dans des ensembles des polynômes ou fonctions polynomiales.

6. Quel est le rang de (P_1, P_2, \dots, P_5) tel que $P_1 = 1 - 2X + X^3$, $P_2 = -2X - X^4$, $P_3 = X^2 - 2X^3 + 2X^4$, $P_4 = 3 + 2X - 3X^4$, $P_5 = 1 - X^2 - X^3 - X^4$? Déterminer une base de $\text{vect}(P_1, P_2, \dots, P_5)$.
7. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la famille $(x \mapsto (x+1)^{n-k}x^k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est une base du \mathbb{R} -e-v des fonctions polynomiales de degré inférieur à n .
8. a. Soit $n \in \mathbb{N}/n \geq 3$. Déterminer la dimension du \mathbb{C} -e-v $F = \{P \in \mathbb{C}_n[X]/(X+i)^2 \text{ divise } P\}$.
 b. Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{C}_n[X]$.
 c. Montrer que $H = \{P \in \mathbb{C}_n[X]/\tilde{P}(i) = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{C}_n[X]$. Trouver un supplémentaire de H dans $\mathbb{C}_n[X]$.
 d. Montrer que $H + F = \mathbb{C}_n[X]$.
 e. H et F sont-ils en somme directe?
 f. Donner une base de $F \cap H, F + H, F \cap K, F + K$.
9. Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X]/P(X^2) = X^2P(X)\}$ et $G = \{P \in \mathbb{R}_3[X]/\tilde{P}(-1) = \tilde{P}(2)\}$.
 a. Montrer que F et G sont deux ss-e-v de $\mathbb{R}_3[X]$ et préciser leur dimension.
 b. Montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}_3[X]$.
10. Dans $\mathbb{R}_n[X]$, on pose $P_0 = 1$ et $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, P_k = \frac{1}{k!}X(X-k)^{k-1}$.
 a. Montrer que $(P_k)_{k=0, \dots, n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
 b. Montrer que $\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, \forall k \in \llbracket 0, j \rrbracket, P_j^{(k)}(X) = P_{j-k}(X-k)$.
 c. En déduire que $P_j^{(k)}(k) = 0$ pour tous j et k distincts dans $\llbracket 0, n \rrbracket$.
 d. Déterminer les composantes d'un polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ dans cette base.

Exercice 3 Dans un ensemble de suites.

5. Calculer le $\text{rg}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z})$ où $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \ln^2(n+1)$, $v_n = \sqrt{n}$, $w_n = (-1)^n$, $z_n = (1 - \frac{1}{n+1})^n$.
6. Quelle est la dimension du \mathbb{C} -e-v des suites complexes 4-périodiques?
7. Objectif : montrer que la famille $((k^n)_{n \in \mathbb{N}})_{k \in \mathbb{N}}$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Fixons $m \in \mathbb{N}$.
 On pose $\forall i \in \llbracket 0, m \rrbracket, L_i(X) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^m \frac{X-k}{i-k}$.
 a. Montrer que la famille $B = (L_0, L_1, \dots, L_m)$ est une base de $\mathbb{R}_m[X]$.
 b. Montrer que $\forall P \in \mathbb{R}_m[X], (P(0), P(1), \dots, P(m))$ sont les composantes de P dans cette base B .
 c. Soit $B_c = (1, X, X^2, \dots, X^m)$ la base canonique de $\mathbb{R}_m[X]$. Déterminer la matrice de passage de B à B_c .
 d. En déduire que la famille $((k^n)_{n \in \mathbb{N}})_{k \in \llbracket 0, \dots, m \rrbracket}$ est libre.
 e. Qu'en déduit-on sur le \mathbb{R} -e-v $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

Exercice 4 Dans un K-e-v E de dimension quelconque.

4. Ici E est de dimension finie p , de base $\mathcal{B} = (\vec{e}_i)_{i=1..p}$. On pose : $\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \vec{\varepsilon}_i = \vec{e}_i - (\vec{e}_{i+1} + \vec{e}_{i+2} + \dots + \vec{e}_p)$ et $\vec{\varepsilon}_p = \vec{e}_p$. Montrer que $\mathcal{B}' = (\vec{\varepsilon}_i)_{i=1..p}$ est une base de E . Soit $\vec{x} \in E$. Exprimer les composantes de \vec{x} dans la base \mathcal{B}' en fonction des composantes de \vec{x} dans B .
5. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $\mathcal{L} = (\vec{u}_i)_{i=1..n}$ une famille libre de vecteurs d'un K -espace vectoriel E .
 a. Etudier la liberté de la famille $\mathcal{F} = (\vec{u}_1 - \vec{u}_2, \vec{u}_2 - \vec{u}_3, \dots, \vec{u}_{n-1} - \vec{u}_n, \vec{u}_n)$.
 b. Etudier la liberté de la famille $\mathcal{F} = (\vec{u}_1 + \vec{u}_2, \vec{u}_2 + \vec{u}_3, \dots, \vec{u}_{n-1} + \vec{u}_n, \vec{u}_1 + \vec{u}_n)$.
 c. Soit $p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Justifier que $\text{vect}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ et $\text{vect}(\vec{u}_{p+1}, \dots, \vec{u}_n)$ sont en somme directe.
 d. Soit $G = \text{vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p)$ et F un ss-e-v de E tels que : $F \oplus G = E$.
 i. Justifier qu'il existe un vecteur non nul \vec{a} dans F .
 ii. $G_a = \text{vect}(\vec{a} + \vec{u}_1, \vec{a} + \vec{u}_2, \dots, \vec{a} + \vec{u}_p)$. Montrer que G_a et F sont supplémentaires dans E .

6. Soit E un K -espace vectoriel admettant une base $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

$$\text{On pose: } \begin{cases} \vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k} \\ \vec{v} = -\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k} \\ \vec{w} = -2\vec{i} + \vec{k} \\ \vec{t} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k} \end{cases} \text{ et } F = \{a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} / (a, b, c) \in K^3 \text{ et } a + b + c = \frac{a}{2}\} \text{ et } G = \text{vect}(\vec{u}, \vec{v}).$$

- Vérifier que F est un ss-e-v de E et $F \oplus G = E$.
- La famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{t})$ est-elle libre ? Est-elle génératrice de E ?
- Extraire de cette famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{t})$ une base de E . Et exprimer \vec{t} comme c. l. de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.
- Déterminer un système d'équations de G dans B
- Soit $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ trois vecteurs de E tels que $\text{mat}_B(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{pmatrix} 1+x & x & x \\ y & 1+y & y \\ z & z & 1+z \end{pmatrix}$ où $(x, y, z) \in K^3$.
 - Exprimer $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ en fonction de $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.
 - $H = \{(x, y, z) \in K^3 / (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \text{ est une famille libre}\}$ est-il un ss-e-v de K^3 ?

Exercice 5 dans \mathbb{R}^n .

- Déterminer une \mathbb{R} -base du \mathbb{R} -e-v \mathbb{C}^n .
- Etudier la liberté de la famille $\mathcal{F} = ((1, 2, 3, 4, 1), (2, 3, 1, 2, 1), (0, -1, -5, -6, -1), (3, 3, -6, -6, 0))$ et déterminer un supplémentaire de $\text{vect } \mathcal{F}$ dans \mathbb{R}^5 .
- Etudier la liberté de la famille $((a, 1, 0, a), (0, a, 2a + 2, 0), (1, 0, a, 0), (2a, 0, 1, a))$ où a paramètre réel.
- Montrer que $((1, 0, 1), (-1, -1, 1), (-2, 1, -2))$ est une base de \mathbb{R}^3 . Ecrire $X = (x, y, z)$ dans cette nouvelle base
- $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x - 2y = 0 \text{ et } y - 2z = 0\}$ et $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + z = y + t\}$
 - Donner une base de $V \cap W$ et de $V + W$.
 - Donner un supplémentaire H de $V \cap W$ dans W .
 - Montrer que V et H sont supplémentaires dans \mathbb{R}^4 .
- $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \text{vect}((1, 1, \dots, 1, 1))$ et $G = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / \sum_{k=1}^n x_k = 0\}$.
 - Justifier que F et G sont des ss-e-v de E de dimension finie et déterminer leur dimension.
 - Montrer que F et G sont supplémentaires dans E .
- $F = \{(x_1, \dots, x_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n} / \sum_{i=1}^n x_i = 0 = \sum_{i=n+1}^{2n} x_i\}$. Montrer que F est un ss-e-v de \mathbb{R}^{2n} . Déterminer la dimension de F et un supplémentaire de F dans \mathbb{R}^{2n}

Exercice 6 dans $M_{n,p}(\mathbb{R})$.

- Déterminer la dimension de $AS_n(\mathbb{R})$.
- Soit $A = \text{diag}(2, 2, 1)$. Trouver la dimension de $E = \{M \in M_3(\mathbb{R}) / AM = MA\}$. Déterminer un supplémentaire de E dans $M_3(\mathbb{R})$.
- Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$. Trouver la dimension de $E = \{AM / M \in M_2(\mathbb{R})\}$. Déterminer un supplémentaire de E dans $M_{3,2}(\mathbb{R})$.
- Montrer que la famille $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right)$ est libre et la compléter pour obtenir une base de $M_{3,2}(\mathbb{R})$.
- La famille $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right)$ est-elle une base de $M_2(\mathbb{R})$? Si oui, donner les composantes de $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dans cette base.

Exercice 7 Soit E un K -e-v de dimension finie $n \geq 2$.

- Soit $(m, p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p \leq m$. Soit $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m)$ une famille de vecteurs de E .
Montrer que, $\text{rg}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p) \geq \text{rg}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m) + p - m$.
- Soit F et G deux ss-e-v de E de dimension $p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. On cherche à prouver que F et G ont un supplémentaire H dans E commun.
 - Trouver H dans le cas où $F = G$.
 - On suppose que $F \neq G$.
 - Montrer que $F \not\subset G$ et $G \not\subset F$.
 - Construire un vecteur $\vec{u}_1 \notin F \cup G$. On pose $F_1 = F + \text{vect}(\vec{u}_1)$ et $G_1 = G + \text{vect}(\vec{u}_1)$.
 - Trouver H dans le cas où $F \neq G$ et $p + 1 = n$.
 - Si $p + 1 < n$, montrer que $F_1 \neq G_1$ et poursuivre le raisonnement pour trouver H .

