

# Espace préhilbertien réel. Espace euclidien

**Produit scalaire** Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

On appelle **produit scalaire** sur  $E$  toute application  $\varphi$  définie sur  $E \times E (= E^2)$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$  qui vérifie :

$$1. \forall (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \in E^3, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}, \vec{z}) &= \alpha\varphi(\vec{x}, \vec{z}) + \beta\varphi(\vec{y}, \vec{z}) \\ \varphi(\vec{z}, \alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) &= \alpha\varphi(\vec{z}, \vec{x}) + \beta\varphi(\vec{z}, \vec{y}) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \varphi \text{ est} \\ \text{bilinéaire} \end{array}$$

i.e.  $\varphi$  est linéaire par rapport à la 1<sup>ère</sup> variable et par rapport à la 2<sup>ème</sup> variable

$$3. \forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, \varphi(\vec{x}, \vec{y}) = \varphi(\vec{y}, \vec{x}) \quad \varphi \text{ est symétrique}$$

$$4. \forall \vec{x} \in E, \varphi(\vec{x}, \vec{x}) \geq 0 \quad \varphi \text{ est positive}$$

$$5. \forall \vec{x} \in E, \varphi(\vec{x}, \vec{x}) = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0} \quad \left. \begin{array}{l} \varphi \text{ est} \\ \text{définie-positive} \end{array} \right\}$$

$E$ , muni d'un produit scalaire, est appelé un **espace préhilbertien réel**.  $\varphi(\vec{x}, \vec{y})$  est noté :  $(\vec{x} | \vec{y})$  ou  $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle$ . 1

**NB:** Si  $\varphi$  est symétrique et linéaire par rapport à l'une des variable alors  $\varphi$  est linéaire par rapport à l'autre variable. Il suffit donc de prouver une seul linéarité

**Règles de calcul :**

$$\bullet \forall \vec{x} \in E, (\vec{x} | \vec{0}) = 0 = (\vec{0} | \vec{x})$$

$$\bullet \forall (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p) \in E^p, \forall (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p,$$

$$\left( \sum_{k=1}^p \alpha_k \vec{x}_k \mid \vec{y} \right) = \sum_{k=1}^p \alpha_k (\vec{x}_k \mid \vec{y}) = (\vec{y} \mid \sum_{k=1}^p \alpha_k \vec{x}_k) \quad 2$$

**Exemples de référence à connaître et savoir redémontrer :**

1) sur  $\mathbb{R}^n$ : l'application  $((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i y_i$  est un produit scalaire sur  $\mathbb{R}^n$  appelé **produit scalaire canonique**.

2) Soit  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$ . Sur  $C^0([a, b], \mathbb{R})$  : si  $\omega$  est une application strictement positive et continue sur  $[a, b]$  alors l'application  $((f, g) \mapsto \int_a^b f(t)g(t)\omega(t)dt)$  est un produit scalaire sur  $C^0([a, b], \mathbb{R})$ .

3) Sur  $\mathbb{R}[X]$  : l'application  $((P, Q) \mapsto \int_a^b P(t)Q(t)dt)$  est un produit scalaire sur  $\mathbb{R}[X]$

4) Si  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$  et  $Q = \sum_{k=0}^n b_k X^k$  et  $(P/Q) = \sum_{k=0}^n a_k b_k$ . L'application :  $((P, Q) \mapsto (P/Q))$  est le produit scalaire canonique sur  $\mathbb{R}_n[X]$ .

5) Si  $a_0, a_1, \dots, a_n$  sont  $n + 1$  réels distincts alors l'application :  $((P, Q) \mapsto \sum_{i=0}^n P(a_i)Q(a_i))$  est un produit scalaire sur  $\mathbb{R}_n[X]$ .

6)  $((M/N) = \text{tr}(M^T N))$  définit le produit scalaire canonique sur  $M_n(\mathbb{R})$

Désormais  $E$  est un  $\mathbb{R}$  e v muni du produit scalaire  $(. | .)$ .

**Inégalité de Cauchy-Schwarz**

$$\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, (\vec{x} | \vec{y})^2 \leq (\vec{x} | \vec{x})(\vec{y} | \vec{y}) \quad \text{inégalité de Cauchy-Schwarz}$$

$$\text{Autrement dit, } |(\vec{x} | \vec{y})| \leq \sqrt{(\vec{x} | \vec{x})} \sqrt{(\vec{y} | \vec{y})}$$

Et,  $|(\vec{x} | \vec{y})| = \sqrt{(\vec{x} | \vec{x})} \sqrt{(\vec{y} | \vec{y})}$  **si et seulement si**  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  sont colinéaires 3

On retrouve les inégalités de Cauchy-Schwarz déjà rencontrées :

1) Cauchy-Schwarz dans  $\mathbb{R}^n$  muni du produit scalaire canonique :

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \in (\mathbb{R}^n)^2, \left( \sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 \leq \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n y_i^2 \right)$$

2) Cauchy-Schwarz dans  $\mathbb{R}^n$  dans  $C^0([a, b], \mathbb{R})$  du ps.  $(f/g) = \int_a^b f(t)g(t)dt$

$$\forall (f, g) \in C^0([a, b], \mathbb{R})^2 \left( \int_a^b f(t)g(t)dt \right)^2 \leq \left( \int_a^b f(t)^2 dt \right) \left( \int_a^b g(t)^2 dt \right) \quad 4$$

**Ex1** Soit  $x, y, z$  des réels tels que  $2x^2 + y^2 + 3z^2 \leq 1$ . Montrer que  $(x + y + z)^2 \leq \frac{11}{6}$ .

**Norme, vecteur unitaire et distance** Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$  e v.

• On appelle **norme** sur  $E$  toute application  $N$  définie sur  $E$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et telle que :

$$1. \forall \vec{x} \in E, N(\vec{x}) \geq 0$$

$$2. \forall \vec{x} \in E, (N(\vec{x}) = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0})$$

$$3. \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \vec{x} \in E, N(\alpha\vec{x}) = |\alpha|N(\vec{x})$$

$\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, N(\vec{x} + \vec{y}) \leq N(\vec{x}) + N(\vec{y})$  *inégalité triangulaire*  
 $N$  est souvent noté  $\| \cdot \|$  et  $N(\vec{x})$  est noté  $\|\vec{x}\|$ .

• L'application  $d$ , définie sur  $E \times E$  par :  $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2,$

$d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|$  est la **distance associée à la norme**  $\| \cdot \|$  et  $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, d(\vec{x}, \vec{y})$  est la **distance** entre  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$ .

• Un **vecteur unitaire**: On dit que le vecteur  $\vec{u}$  de  $E$  est **unitaire** ou **normé** lorsque  $\|\vec{u}\| = 1$ .

Tout vecteur  $\vec{x}$  non nul de  $E$  est colinéaire à un vecteur

$$\text{unitaire car } \vec{x} = \|\vec{x}\| \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} \quad 5$$

**Norme euclidienne** L'application  $\| \cdot \|$  définie sur  $E$  par :  $\forall \vec{x} \in E,$

$\|\vec{x}\| = \sqrt{(\vec{x} | \vec{x})}$  est une norme sur  $E$  appelée **norme euclidienne** associée au produit scalaire  $(. | .)$ . Alors,

$$\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, \|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\| \quad \text{et} \quad |(\vec{x} | \vec{y})| \leq \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \quad 6$$

**Normes dans nos espaces de référence :**

1) Dans  $\mathbb{R}^n$  muni du produit scalaire canonique, la norme euclidienne canonique est  $\|(x_1, \dots, x_n)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ ,

2) Dans  $C^0([a, b], \mathbb{R})$  muni du ps:  $(f/g) = \int_a^b f(t)g(t)dt$ , la norme euclidienne associée est  $\|f\| = \sqrt{\int_a^b f(t)^2 dt}$ .

3) Dans  $\mathbb{R}_n[X]$  du ps:  $(P/Q) = \sum_{i=0}^n P(a_i)Q(a_i)$  où  $a_0, a_1, \dots, a_n$  sont  $n + 1$  réels fixés distincts alors  $\|P\| = \sqrt{\sum_{i=0}^n P(a_i)^2}$ .

4) Dans  $M_n(\mathbb{R})$  muni du ps :  $(M/N) = \text{tr}(M^T N)$ ,  $\forall M = (m_{ij}) \in M_n(\mathbb{R}), \|M\| = \sqrt{\text{tr}(M^T M)} = \sqrt{\sum_{(i,j) \in [1,n]^2} m_{ij}^2}$ . 7

Désormais,  $E$  un  $\mathbb{R}$  e v muni du produit scalaire  $(. | .)$  de norme associée  $\| \cdot \|$ .

**Relations entre norme et produit scalaire.**  $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2,$

$$1. \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + 2(\vec{x} | \vec{y}) + \|\vec{y}\|^2$$

$$2. \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 - 2(\vec{x} | \vec{y}) + \|\vec{y}\|^2$$

$$3. (\vec{x} + \vec{y} | \vec{x} - \vec{y}) = \|\vec{x}\|^2 - \|\vec{y}\|^2$$

$$4. (\vec{x} | \vec{y}) = \frac{1}{4} \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 - \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 \quad \text{identité de polarisation.} \quad 8$$

**Vecteurs et espaces orthogonaux .**

1. Deux **vecteurs**  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  de  $E$  sont dits **orthogonaux** lorsque  $(\vec{x} | \vec{y}) = 0$ . On note  $\vec{x} \perp \vec{y}$ .

2. Deux **sous-ensembles**  $X$  et  $Y$  de  $E$  sont dits **orthogonaux** lorsque  $\forall \vec{x} \in X, \forall \vec{y} \in Y, (\vec{x} | \vec{y}) = 0$  On note  $X \perp Y$ .

3. Un vecteur  $\vec{y}$  est orthogonal à un ss-e-v  $X$  lorsque  $\forall \vec{x} \in X, (\vec{x} | \vec{y}) = 0$ . On note  $\vec{y} \perp X$ . 9

**Somme directe et orthogonalité** Si les **ss-e-v**  $F$  et  $G$  de  $E$  sont orthogonaux alors  $F \cap G = \{\vec{0}\}$ . 10

**L'orthogonal d'une partie**

Soit  $X$  une partie de  $E$ .

**L'orthogonal de  $X$**  est l'ensemble noté  $X^\perp$  des vecteurs de  $E$  orthogonaux à tous les vecteurs de  $X$ .

$$X^\perp = \{ \vec{u} \in E \mid \forall \vec{x} \in X, (\vec{u} | \vec{x}) = 0 \}$$

**ie.**  $\vec{u} \in X^\perp$  si et ssi  $\forall \vec{x} \in X, (\vec{u} | \vec{x}) = 0$  si et ssi  $\vec{u} \perp X$ .

$X^\perp$  est un sous espace vectoriel de  $E$  et  $X^\perp = (\text{vect}(X))^\perp$ . 11

**Exemple2:** On munit  $\mathbb{R}^3$  du produit scalaire canonique alors  $P = \{(x, y, z) \mid x + 2y - 3z = 0\} = \{(1, 2, -3)\}^\perp$ .

**Propriétés**

1. Si  $X$  et  $Y$  sont deux sous-ensembles de  $E$  tels que  $X \subset Y$  alors  $Y^\perp \subset X^\perp$ .

2. Si  $F$  et  $G$  sont deux ss e v de  $E$ , alors

$$G \perp F \Leftrightarrow G \text{ est un ss e v de } F^\perp.$$

3. Si  $F = \text{vect}(\vec{e}_i)_{i \in \{1, \dots, p\}}$  alors

$$F^\perp = \{ \vec{u} \in E \mid \forall i \in \{1, \dots, p\}, (\vec{u} | \vec{e}_i) = 0 \}$$

4. Pour être orthogonal à  $F$ , il faut et il suffit d'être orthogonal à tous les vecteurs de la famille génératrice de  $F$ .

5. Si  $F = \text{vect}(\vec{e}_i)_{i \in \{1, \dots, p\}}$  et  $G = \text{vect}(\vec{g}_k)_{k=1, \dots, q}$  alors

$$G \perp F \Leftrightarrow \forall k \in \{1, \dots, q\}, \forall l \in \{1, \dots, p\}, \vec{g}_k \perp \vec{e}_l \quad 12$$

**Famille orthogonale, orthonormale**

Soit  $\mathcal{B} = (\vec{e}_i)_{i \in I}$  une famille de vecteurs de  $E$

•  $\mathcal{B}$  est une **famille orthogonale** lorsque les vecteurs de  $\mathcal{B}$  sont deux à deux orthogonaux.

$$\text{ie. } \forall (k, m) \in I^2, (m \neq k \Rightarrow (\vec{e}_m | \vec{e}_k) = 0)$$

•  $\mathcal{B}$  est dite **base orthogonale** de  $E$  lorsque  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$  et  $\mathcal{B}$  est orthogonale.

•  $\mathcal{B}$  est dite **orthonormale** (ou **orthonormée**) lorsque  $\mathcal{B}$  est orthogonale et les vecteurs de  $\mathcal{B}$  sont unitaires i.e. lorsque :

$$\forall (k, m) \in I^2, (\vec{e}_m | \vec{e}_k) = \delta_{mk} \quad (\text{symbole de Kronecker})$$

•  $\mathcal{B}$  est dite **base orthonormée (B. O. N)** de  $E$  lorsque  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$  et  $\mathcal{B}$  est orthonormale. 13

**RQUE** Une famille orthonormale ne contient jamais le vecteur nul

• Si  $B = (\vec{e}_i)_{i \in I}$  est une famille de vecteurs de  $E$ , orthogonale, alors  $\forall (\alpha_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}^I, B' = (\alpha_i \vec{e}_i)_{i \in I}$  est une famille orthogonale. 14

### Liberté et orthogonalité

Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls de  $E$  est libre. En particulier, toute famille orthonormale est libre. 15

### BON des espaces de référence

1. La base canonique de  $\mathbb{R}^n$  est une BON pour le produit scalaire canonique de  $\mathbb{R}^n$ . 16

2.  $(E_{ij})_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}}$  est une BON de  $M_n(\mathbb{R})$  muni de son p.s. canonique.

3.  $(X^k)_{k=0..n}$  est une BON de  $\mathbb{R}_n[X]$  de son produit scalaire canonique.

4. Soit  $a_0, a_1, \dots, a_n$  ( $n+1$ ) réels distincts. On munit  $\mathbb{R}_n[X]$  du produit scalaire  $(P/Q) = \sum_{i=0}^n P(a_i)Q(a_i)$  et on définit les polynômes :  $L_k(X) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{X-a_j}{a_k-a_j}$

pour  $k \in \{0, \dots, n\}$ . Alors  $(L_k)_{k=0..n}$  est une BON de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

5. On munit  $C^0([0, \pi], \mathbb{R})$  du produit scalaire  $((f, g) \mapsto \int_0^\pi f(t)g(t)dt)$  et on définit  $f_k: (t \rightarrow \cos(kt))$ . Alors  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est une famille orthogonale donc libre.

**Théorème de Pythagore et généralisation** : Les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ , de  $E$ , sont orthogonaux si et seulement si  $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$

**Généralisation de  $\Rightarrow$**  : Si  $B = (\vec{e}_i)_{i \in \{1..n\}}$  est une famille orthogonale de vecteurs de  $E$  alors  $\forall (\alpha_i)_{i \in \{1..n\}} \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{e}_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \|\vec{e}_i\|^2. \quad 17$$

**Orthonormalisation de Gram - Schmidt : Construction d'une famille orthonormée de  $E$  à partir d'une famille libre.** Soit  $V = (\vec{v}_i)_{i \in \{1..n\}}$  une famille libre de vecteurs de  $E$ . Alors, il existe une famille orthonormée  $B = (\vec{e}_i)_{i \in \{1..n\}}$  de  $E$  telle que :  $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \vec{e}_i \in \text{vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_i)$ . 18

**Espace euclidien**  $E$  est un **espace euclidien** lorsque  $E$  est un espace préhilbertien réel de dimension finie (i.e. un  $\mathbb{R}$  e v de dimension finie muni d'un produit scalaire). 19

**Existence d'une BON dans un espace euclidien** Tout espace vectoriel euclidien de dimension non nulle possède une BON. 20

**Ex3** : Déterminer une base de  $\mathbb{R}_2[X]$  muni du p.s. :  $(P/Q) = \int_0^1 \tilde{P}(t)\tilde{Q}(t)dt$ .

**Théorème de la BON incomplète** : Toute famille orthonormée d'un espace vectoriel euclidien  $E$  peut être complétée pour obtenir un BON de  $E$ . 21

### Ecriture dans une BON.

22  
Soit  $\mathcal{B} = (\vec{e}_i)_{i \in \{1..n\}}$  une BON de l'espace euclidien  $E$ . Soit  $\vec{x} = \sum_{k=1}^n x_k \vec{e}_k$  et  $\vec{y} = \sum_{k=1}^n y_k \vec{e}_k$  deux vecteurs de  $E$  et  $\text{mat}_{\mathcal{B}} \vec{x} = X$  et  $\text{mat}_{\mathcal{B}} \vec{y} = Y$ . Alors,

$$1. (\vec{x}/\vec{y}) = \sum_{k=1}^n x_k y_k \quad \text{et} \quad \|\vec{x}\|^2 = \sum_{k=1}^n x_k^2$$

$$2. \forall k \in \{1, \dots, n\}, x_k = (\vec{x}/\vec{e}_k) \quad \text{et} \quad \vec{x} = \sum_{k=1}^n (\vec{x}/\vec{e}_k) \vec{e}_k$$

$$(\vec{x}/\vec{y}) = \sum_{k=1}^n (\vec{x}/\vec{e}_k) (\vec{y}/\vec{e}_k) \quad \text{et} \quad \|\vec{x}\|^2 = \sum_{k=1}^n (\vec{x}/\vec{e}_k)^2$$

$$3. (\vec{x}/\vec{y}) = X^T Y = Y^T X \quad \text{et} \quad \|\vec{x}\|^2 = X^T X.$$

**NB** : Calculer le produit scalaire de deux vecteurs de  $E$  revient à effectuer le produit scalaire canonique de leurs  $n$ -uplets des composantes dans une BON de  $E$ . idem pour la norme

**Ex4** : Soit  $a_0, a_1, \dots, a_n$  des réels distincts et  $\forall k \in \{0, \dots, n\}, L_k(X) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{X-a_j}{a_k-a_j}$ . Montrer

que  $\forall P$  de  $\mathbb{R}_n[X], P = \sum_{k=0}^n P(a_k) L_k$ .

**Préliminaire** : Si  $F$  est un ss e v d'un espace préhilbertien  $E$  et  $\dim F < +\infty$ , alors en restreignant le produit scalaire à  $F \times F$ , je munis  $F$  d'une structure d'espace préhilbertien et donc,  $F$  est un e-v euclidien et possède donc une B. O. N. 23

### Supplémentaire orthogonal

Si  $F$  est un ss e v de l'espace préhilbertien réel  $E$  et  $F$  est de dimension finie alors

- $E = F \oplus F^\perp$  i.e.  $F^\perp$  est un supplémentaire de  $F$  dans  $E$
- $F^\perp$  est le seul supplémentaire de  $F$  dans  $E$  qui soit orthogonal à  $F$ . on note  $E = F \oplus^\perp F^\perp$
- $(F^\perp)^\perp = F$ .

$F^\perp$  est appelé le **supplémentaire orthogonal** de  $F$  dans  $E$  24

**Csq** : 1. si  $E$  est de dimension finie alors  $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$ .

2. la concaténation d'une BON de  $F$  et d'une base de  $F^\perp$  est une BON de  $E$ .

**Projection orthogonale** Soit  $E$  un espace préhilbertien réel et  $F$  un ss-e-v de  $E$  tel que  $\dim F < +\infty$ .

La **projection orthogonale** sur  $F$  est la projection sur  $F$  et parallèlement à  $F^\perp$  et est notée  $p_F$ .

Soit  $\vec{x} \in E, p_F(\vec{x})$  est le **projeté orthogonal** de  $\vec{x}$  sur  $F$  et  $p_{F^\perp}(\vec{x}) = \vec{x} - p_F(\vec{x})$  est le **projeté orthogonal** de  $\vec{x}$  sur  $F^\perp$ . 25

**Csq** : 1.  $\text{Im } p_F \oplus^\perp \text{Ker } p_F = E$ .

2.  $\forall \vec{x} \in E, \|\vec{x}\|^2 = \|p_F(\vec{x})\|^2 + \|\vec{x} - p_F(\vec{x})\|^2$  et  $\|\vec{x}\| \geq \|p_F(\vec{x})\|$ .

**Caractérisation d'une projection orthogonale.** Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien et  $p \in \mathcal{L}(E)$ .

$p$  est un projection orthogonale si et ssi et  $\left\{ \begin{array}{l} p \circ p = p \\ \text{Im}(p) \perp \text{Ker}(p) \end{array} \right.$  26

**Ex5**  $\mathbb{R}^3$  est muni de son produit scalaire usuel. Soient  $M = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ 6 & 10 & 2 \\ -3 & 2 & 13 \end{pmatrix}$  et  $p$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  canoniquement associé à  $M$ . Montrer que  $p$  est une projection orthogonale, en donner ses éléments caractéristiques. Déterminer une base orthonormée de  $\mathbb{R}^3$  dans laquelle la matrice de  $p$  est diagonale.

**Caractérisations du projeté orthogonal** Soit  $E$  un espace préhilbertien réel et  $F$  un ss-e-v de  $E$  tel que  $\dim F < +\infty$

Soit  $\vec{x}$  un vecteur de  $E$

- $p_F(\vec{x})$  est l'unique vecteur de  $E$  tel que :  $p_F(\vec{x}) \in F$  et  $\vec{x} - p_F(\vec{x}) \perp F$ .
- Si  $(\vec{u}_k)_{k \in \{1..p\}}$  est une base de  $F$  alors  $p_F(\vec{x})$  est l'unique vecteur de  $E$  tel que :  $\begin{cases} p_F(\vec{x}) = \sum_{k=1}^p \lambda_k \vec{u}_k \\ \text{et } \forall l \in \{1, \dots, p\}, (\vec{x} - p_F(\vec{x})/\vec{u}_l) = 0 \end{cases}$
- Si  $(\vec{e}_i)_{i \in \{1..p\}}$  est une base orthonormée de  $F$  alors  $\forall \vec{x} \in E, p_F(\vec{x}) = \sum_{k=1}^p (\vec{x}/\vec{e}_k) \vec{e}_k$ . 27

**Ex6** Déterminer le projeté orthogonal de  $3X^2 + 2X - 1$  sur  $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] / P'(0) = 2P(0)\}$  dans  $\mathbb{R}_2[X]$  muni du p.s.  $(P/Q) = \sum_{k=1}^2 P(k)Q(k)$ .

**Distance à un ss-e-v** Soit  $E$  un espace préhilbertien réel et  $F$  un ss-e-v de  $E$  tel que  $\dim F < +\infty$  28

•  $\forall \vec{x} \in E, \forall \vec{f} \in F, p_F(\vec{x}) \neq \vec{f} \Rightarrow \|\vec{x} - p_F(\vec{x})\| < \|\vec{x} - \vec{f}\|$ .

•  $\forall \vec{x} \in E, \|\vec{x} - p_F(\vec{x})\| = \min\{\|\vec{x} - \vec{f}\| / \vec{f} \in F\}$  = la plus courte distance entre  $\vec{x}$  et  $F$  et n'importe quel vecteur de  $F$ .

Pour tout  $\vec{x} \in E, d(\vec{x}, F) = \min\{\|\vec{x} - \vec{f}\| / \vec{f} \in F\}$  est la distance entre  $\vec{x}$  et  $F$  et pour tout  $\vec{x} \in E, p_F(\vec{x})$  est l'unique vecteur de  $F$  tq  $\forall \vec{x} \in E, d(\vec{x}, F) = d(\vec{x}, p_F(\vec{x})) = \|\vec{x} - p_F(\vec{x})\| = \|p_{F^\perp}(\vec{x})\|$ .

**Ex7** Calculons  $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^\pi (sint - at - b)^2 dt$

**Projection orthogonale sur une droite, distance à une droite** : Soit  $D$  la droite vectorielle engendrée par le vecteur  $\vec{u}$  de  $E$ . Soit  $\vec{x} \in E$ . Alors,  $p_D(\vec{x}) = \frac{(\vec{x}/\vec{u})}{(\vec{u}/\vec{u})} \vec{u}$  et  $d(\vec{x}, D) = \left\| \vec{x} - \frac{(\vec{x}/\vec{u})}{(\vec{u}/\vec{u})} \vec{u} \right\|$ . 29

### Hyperplan dans un espace euclidien

Soit  $H$  un hyperplan de l'espace euclidien  $E$ .

- $H^\perp$  est une droite vectorielle. Tout vecteur directeur de cette droite  $H^\perp$  est appelé un **vecteur normal à  $H$** .
- Soit  $\vec{n}$  normal à  $H$ .  $\forall \vec{x} \in E, d(\vec{x}, H) = \frac{|\vec{x}/\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$ .
- Soit  $B = (\vec{e}_i)_{i \in \{1..n\}}$  une BON de  $E$  et  $\vec{n} = \sum_{i=1}^n n_i \vec{e}_i$ . un vecteur normal à  $H$ . Alors,
- $H = \{ \vec{x} \in E / \vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i \text{ et } \sum_{i=1}^n x_i n_i = 0 \}$  et   
 équation de  $H$  dans  $B$

$$d(\vec{x}, H) = \frac{|\sum_{i=1}^n x_i n_i|}{\sqrt{\sum_{i=1}^n n_i^2}} \quad 30$$

où  $\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i$