

TD 22 Espaces euclidiens

Ex 0 Est-ce un produit scalaire ?

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. L'application $\varphi: ((X, Y) \mapsto X^T A Y)$ est-elle un produit scalaire sur $M_{3,1}(\mathbb{R})$?

Ex 1 Est-ce un produit scalaire ? Soit a, b, c et d des réels et $\varphi: \begin{matrix} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ ((x, y), (x', y')) \mapsto axx' + bxy' + cx'y + dyy' \end{matrix}$.

a) Justifier que φ est bilinéaire et symétrique.

b) Montrer que φ est produit scalaire sur \mathbb{R}^2 si et seulement si $\begin{cases} b = c \\ a > 0 \\ b^2 - ad < 0 \end{cases}$.

Ex 2 Montrer que $\varphi: ((P, Q) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} P(n)Q(n)e^{-n})$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Ex 3 Soit $a = (a_n)$ une suite d'éléments de $[0,1]$. On note $A = \{a_n/n \in \mathbb{N}\}$.

A. Préliminaire : A est dense dans $[0,1]$ lorsque tout intervalle inclus dans $[0,1]$ contient au moins un élément de A ; autrement dit lorsqu'entre deux réels de $[0,1]$, il y a toujours un élément de A .

Montrer que si A est dense dans $[0,1]$ alors tout élément de $[0,1]$ est limite d'une suite d'éléments de A .

B. Soit $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$ et $\varphi(f, g) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} f(a_n)g(a_n)$.

1. Justifier que : $\forall (f, g) \in E^2, \varphi(f, g)$ existe bien.
2. Montrer que φ est un produit scalaire sur E si et seulement si A est dense dans $[0,1]$.

Ex 4 Soient u et v deux vecteurs non nuls d'un espace préhilbertien. Montrer que $\left\| \frac{u}{\|u\|^2} - \frac{v}{\|v\|^2} \right\| = \frac{\|u-v\|}{\|u\|\|v\|}$.

Ex 5 CAUCHY-SCHWARZ.... Dans \mathbb{R}^n

1. Soit $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.
 - a) Démontrer que $(\sum_{k=1}^n x_k)^2 \leq n \sum_{k=1}^n x_k^2$.
 - b) On suppose ici que $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_k > 0$ et $\sum_{k=1}^n x_k = 1$. Démontrer que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \geq n^2$. Etudier le cas d'égalité.
2. Soit a, b et c trois réels tels que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. On pose $s = a + b + c$ et $D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$.
 - a) Montrer que $D = \frac{1}{2}s(3 - s^2)$.
 - b) Justifier que $|s| \leq \sqrt{3}$.
 - c) En déduire que $|D| \leq 1$.

3. Démontrer que : si X est une variable aléatoire non nulle à valeurs dans \mathbb{N} et sur un univers fini alors $\frac{(E(X))^2}{E(X)^2} \leq P(X \geq 1)$ (cf TD variables aléatoires)

Ex 6 CAUCHY-SCHWARZ.... Dans $M_n(\mathbb{R})$ Justifier que $\forall (A, B) \in S_n(\mathbb{R})^2, [tr(AB)]^2 \leq tr(A^2)tr(B^2)$.

Ex 7 CAUCHY-SCHWARZ.... Dans $C^0([a, b], \mathbb{R})$.

1. Soit $f \in C^0([0,1], \mathbb{R}^+)$. $\forall k \in \mathbb{N}$, on pose $I_k = \int_0^1 x^k f(x) dx$. Montrer que $\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, I_{n+p}^2 \leq I_{2n}I_{2p}$.
2. Déterminer $\inf \left\{ \left(\int_a^b f \right) \left(\int_a^b \frac{1}{f} \right) / f \in C^0([a, b], \mathbb{R}^{**}) \right\}$.
3. Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0,1]$ à valeurs réelles et telle que $f(0) = 0$.
 - a) Soit $x \in [0,1]$. Montrer que : $f(x)^2 \leq x \int_0^x f'(t)^2 dt$.
 - b) En déduire que : $\int_0^1 f(x)^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_0^1 f'(x)^2 dx$.
4. Soit f et g réelles et continues sur $[0,1]$ et telles que $\int_0^1 f = 0$.

Montrer que $\left(\int_0^1 f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \left(\int_0^1 f(x)^2 dx \right) \left(\int_0^1 g(x)^2 dx - \left(\int_0^1 g(x) dx \right)^2 \right)$.



Ex 8 CAUCHY-SCHWARZ.... Dans $\mathbb{R}[X]$ Justifier que $\forall P \in \mathbb{R}[X], \left[\int_{-1}^1 tP(t) dt \right]^2 \leq \frac{2}{3} \int_{-1}^1 (P(t))^2 dt$.

Ex 9 Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $(E, (\cdot, \cdot))$ un espace vectoriel euclidien de dimension n . Soit e_1, e_2, \dots, e_p p vecteurs de E tels que :

- $\forall k, \|e_k\| = 1$ et $\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{k=1}^p (x/e_k)^2$.
1. Montrer que $B = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ est une famille orthonormée. Déterminer $(vect(B))^\perp$.
 2. En déduire que B est une base de E et $p = n$.

Ex 10 Soit E un espace euclidien et F un sous-espace vectoriel de E . On note p_F la projection orthogonale sur F . Montrer que : $\forall (u, v) \in E^2, (p_F(u)/v) = (u/p_F(v)) = (p_F(u)/p_F(v))$.

Ex 11 $\forall (P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, on pose $\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(0)Q^{(k)}(0)$.

1. Montrer que $((P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle)$ est un produit scalaire (p.s) sur $\mathbb{R}_n[X]$. On munit désormais $\mathbb{R}_n[X]$ de ce produit scalaire.
2. Soit $H = \{P \in \mathbb{R}_n[X] / \tilde{P}(1) = 0\}$. Justifier que H est un ss-e-v de $\mathbb{R}_n[X]$ et déterminer H^\perp . Calculer la distance de X à H .
3. Déterminer les uniques réels positifs $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $(\lambda_k X^k)_{k=0..n}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$ pour ce p.s.
4. En déduire le projeté orthogonal de $T = 3X^n - 4X^{n-1} + 5X^3 + 2X^2 - 1$ sur $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] / P(X) = P(-X)\}$.

Ex 12 $\forall (P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2, (P/Q) = \int_{-1}^1 \tilde{P}(t)\tilde{Q}(t)dt$.

1. Montrer que $(./.)$ est un p.s sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Pour $n = 3$, trouver une BON de $\mathbb{R}_3[X]$ muni de ce p.s.
3. Soit $H = \{P \in \mathbb{R}_n[X] / XP(X) = P(X^2)\}$. Montrer que $\forall Q \in \mathbb{R}_n[X], p_H(Q) = \left[\frac{3}{2} \int_{-1}^1 t\tilde{Q}(t)dt\right]X$.

Ex 13 On munit \mathbb{R}^4 du produit scalaire canonique. Soit $H = \{(x, y, z, t) / x - y + z - t = 0\}$ et $F = \{(x, y, z, t) / x + y = y + z = z + t\}$.

1. Montrer que H est un hyperplan et préciser H^\perp .
2. Déterminer une base orthonormée de H .
3. Déterminer la matrice de p_H et celle de p_{H^\perp} dans la base canonique de \mathbb{R}^4 .
4. Soit $X = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Déterminer $d(X, F)$.

Ex 14 On munit $M_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire usuel : $(A/B) = tr(A^T B)$.

1. Prouver qu'il s'agit bien d'un p.s. sur $M_n(\mathbb{R})$
2. Déterminer $D_n(\mathbb{R})^\perp$.
3. Montrer que $S_n(\mathbb{R})^\perp = AS_n(\mathbb{R})$.
4. Montrer que $\forall A \in M_n(\mathbb{R}), |tr(A)| \leq \sqrt{n}\|A\|$.
5. Montre que $\forall (A, B) \in M_n(\mathbb{R})^2, \|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

Ex 15 $\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2, (P/Q) = \int_{-1}^1 \tilde{P}(t)\tilde{Q}(t)\sqrt{1-t^2}dt$.

1. Montrer que $(./.)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer qu'il existe une unique suite de polynômes réels $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall u \in \mathbb{R}, \sin((n+1)u) = \sin(u)\tilde{Q}_n(\cos(u))$. Déterminer le degré et coefficient dominant de Q_n .
3. Montrer que la famille $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est orthogonale.
4. Soit $g: \left(\begin{matrix} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \\ (a, b, c) \mapsto \int_{-1}^1 (t^3 + at^2 + bt + c)^2 \sqrt{1-t^2} dt \end{matrix} \right)$. Montrer que g admet un minimum et préciser en quels points ce minimum est atteint.

Ex 16 Calculer $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^\pi (e^x - a \cos(x) - b \sin(x))^2 dx$.

Ex 17 Soit $E = C^\infty([-1,1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $(f/g) = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt$.

- A. Soit $H = \{f \in E / f(0) = 0\}$. Montrer que H est ss-e-v de E et $H^\perp = \{0\}$. Que pensez-vous de $(H^\perp)^\perp$?
- B. Etudions deux familles orthogonales.
 1. $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n: \left(\begin{matrix} [-1,1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto (x^2 - 1)^n \end{matrix} \right)$ et $p_n = u_n^{(n)}$. Montrer que $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille orthogonale de E .
 2. a) Montrer que pour tout entier naturel n , l'équation $x \tan(x) = 1$ admet une unique solution x_n dans l'intervalle $]n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}[$.
b) Justifier que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$ et donner un équivalent simple de x_n .
 - c) On pose $a_n = \frac{2+x_n^2}{1+x_n^2}$ et $f_n: \left(\begin{matrix} [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{\cos(x_n t)}{\sqrt{a_n}} \end{matrix} \right)$. Montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille orthonormée de E .